Tecnica delle Costruzioni Meccaniche

Esercizi e soluzioni

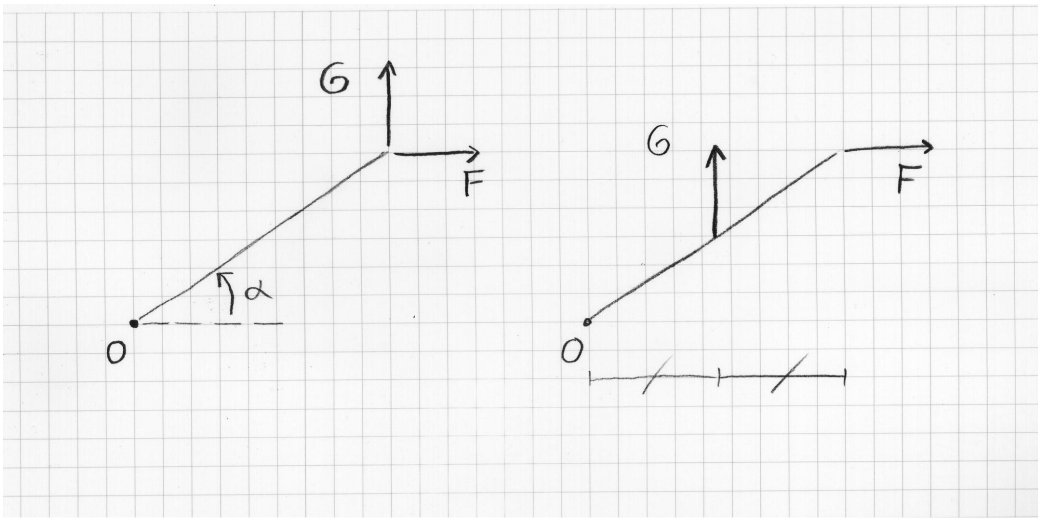
Stefano Miccoli

Anno Accademico 2003/2004
(versione del 28 ottobre 2003)

Indice

1 Macchine semplici

Esercizio 1.1.



Le due leve sono libere di ruotare nell'estremo O ed hanno applicate delle forze F e G di direzione ed intensità fisse ($|F| = |G|$). Determinare l'angolo α per il quale si ha equilibrio.

Soluzione 1.1.

Per risolvere questo esercizio si può semplicemente imporre che il momento delle forze applicate sia nullo rispetto al centro di rotazione della leva.

1. Sia l la lunghezza della leva. L'equazione

$$Gl\cos\alpha - Fl\sin\alpha = 0,$$

tenuto conto che $G = F$, si semplifica in $\cos\alpha = \sin\alpha$, dalla quale si ottiene

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{4} + n\pi.}$$

2. In modo del tutto analogo si ha

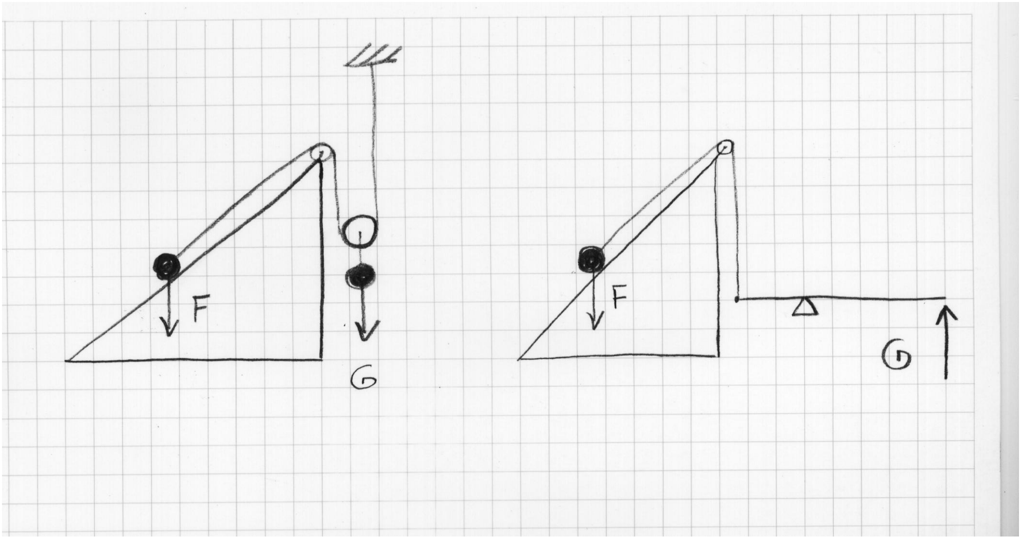
$$G\frac{l}{2}\cos\alpha - Fl\sin\alpha = 0;$$

da questa si ottiene $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}$, cioè

$$\boxed{\alpha = \arctan\frac{1}{2} + n\pi.}$$

Nelle formule precedenti $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, cioè si hanno infinite soluzioni. Ovviamente solo due soluzioni sono distinte in quanto due valori di α che differiscono di un angolo giro (2π) danno luogo a configurazioni geometriche coincidenti: per questo motivo si può anche porre $m = 0, 1$.

Esercizio 1.2.



Determinare F/G, individuando sul disegno le eventuali grandezze geometriche di interesse.

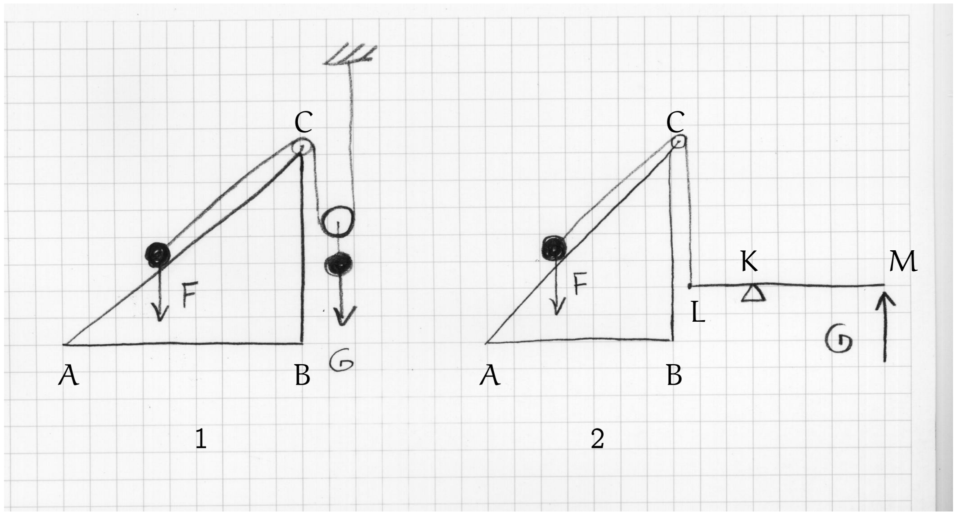
2. Per la leva LKM, chiamato dy_L lo spostamento virtuale di L (positivo verso l'alto), si ha $-dy_L : LK = dy_G : KM$, da cui, tenuto conto che $d\xi = dy_L$,

$$dy_G = -d\xi \frac{KM}{LK}.$$

Si ottiene dunque

$$\boxed{\frac{F}{G} = \frac{KM}{LK}\frac{CA}{CB}.}$$

Soluzione 1.2.



Il principio dei lavori virtuali per entrambi i sistemi si scrive

$$\mathsf{F} \cdot dy_\mathsf{F} + \mathsf{G} \cdot dy_\mathsf{G} = 0,$$

dove dy_F e dy_G sono le componenti di spostamento dei punti di applicazione delle forze nella direzione delle forze stesse. Da questa equazione si ottiene

$$\frac{\mathsf{F}}{\mathsf{G}} = -\frac{dy_\mathsf{G}}{dy_\mathsf{F}}.$$

Per risolvere l'esercizio basta dunque determinare il valore di $dy_\mathsf{G}/dy_\mathsf{F}$. Chiamato $d\xi$ lo spostamento virtuale del peso F lungo il piano inclinato (positivo dall'alto verso il basso), in base a considerazioni sui triangoli simili, si ottiene $d\xi : dy_\mathsf{F} = \mathsf{CA} : \mathsf{CB}$, cioè

$$dy_\mathsf{F} = d\xi \frac{\mathsf{CB}}{\mathsf{CA}}.$$

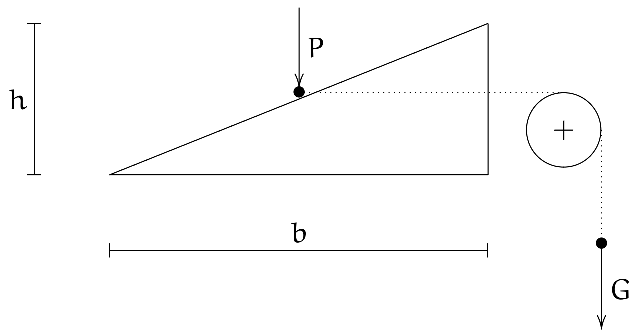
1. Per la presenza della carrucola doppia si ha

$$dy_\mathsf{G} = -\frac{d\xi}{2}$$

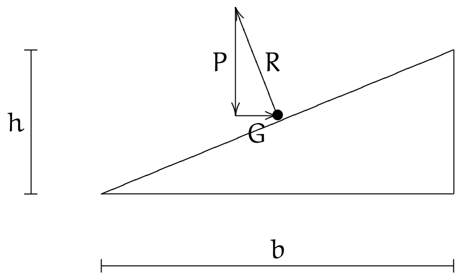
e dunque con ovvie sostituzioni e semplificazioni

$$\boxed{\frac{\mathsf{F}}{\mathsf{G}} = \frac{1}{2}\frac{\mathsf{CA}}{\mathsf{CB}}.}$$

Esercizio 1.3.



Determinare $\dfrac{P}{G}$.

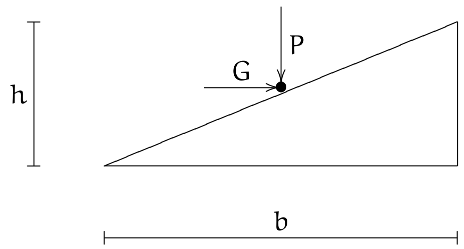


I due triangoli in figura (poligono delle forze e piano inclinato) sono simili e dunque si ottiene nuovamente

$$\frac{P}{G} = \frac{b}{h}.$$

Soluzione 1.3.

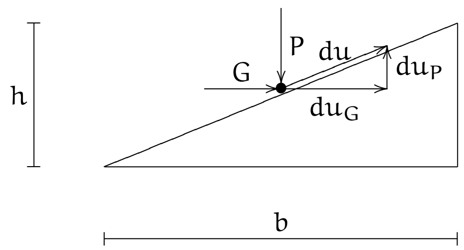
Per prima cosa conviene osservare che la carrucola semplice ha il solo scopo di cambiare la direzione della forza G; il problema può dunque essere riproposto semplicemente come sotto.



Il principio dei lavori virtuali, chiamato $d\vec{u}$ lo spostamento del punto cui sono applicate le forze, si scrive

$$\vec{P} \cdot d\vec{u} + \vec{G} \cdot d\vec{u} = 0.$$

Scomponendo lo spostamento $d\vec{u}$ nella direzione di $\vec{P}$ e $\vec{G}$,



si ottiene

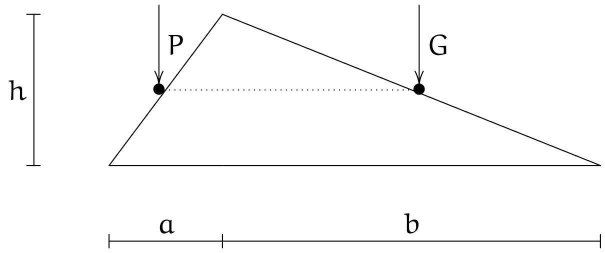
$$G \cdot du_G - P \cdot du_P = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P}{G} = \frac{du_G}{du_P}.$$

In base a considerazioni di similitudine fra triangoli si ottiene facilmente $\frac{du_G}{du_P} = \frac{b}{h}$ e dunque

$$\boxed{\frac{P}{G} = \frac{b}{h}.}$$

Il problema può anche essere risolto ricorrendo a considerazioni di equilibrio. Chiamata R la reazione vincolare esercitata dal piano inclinato, questa deve essere diretta, in assenza di attrito, *perpendicolarmente* al piano stesso. La condizione di equilibrio si esprime dunque imponendo la chiusura del poligono delle forze $\vec{R} + \vec{P} + \vec{G}$:

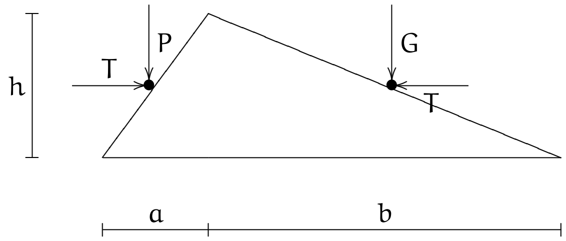
Esercizio 1.4.



Determinare $\frac{P}{G}$.

Soluzione 1.4.

Per risolvere questo esercizio è sufficiente eliminare la fune che tiene collegate le due masse, sostituendola con una forza pari alla sua tensione T.



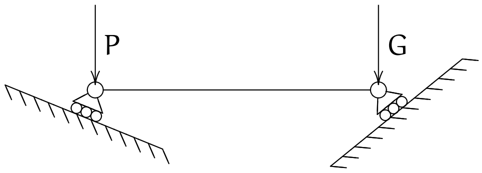
Dall'esercizio precedente di ha

$$\frac{P}{T} = \frac{a}{h},$$
$$\frac{G}{T} = \frac{b}{h};$$

dividendo membro a membro e semplificando T e h si ottiene

$$\boxed{\frac{P}{G} = \frac{a}{b}}$$

Esercizio 1.5.



Determinare $\dfrac{P}{G}$, segnando sul disegno le quote significative.

1.4 sfruttando il risultato precedente si può scrivere

$$\left.\begin{aligned} T &= P\tan\alpha_P, \\ T &= G\tan\alpha_G, \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \frac{P}{G} = \frac{T}{T}\frac{\tan\alpha_G}{\tan\alpha_P} = \frac{\tan\alpha_G}{\tan\alpha_P},$$

che coincide con la soluzione data osservando che $\tan\alpha_P = \dfrac{h}{a}$ e $\tan\alpha_G = \dfrac{h}{b}$;

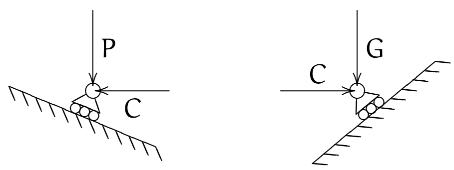
1.5 si può notare che $p = h\tan\alpha_P$ e $q = \tan\alpha_G$, e dunque

$$\frac{P}{G} = \frac{q}{p} = \frac{\tan\alpha_G}{\tan\alpha_P},$$

confermando che i due diversi procedimenti di risoluzione conducono allo stesso risultato.

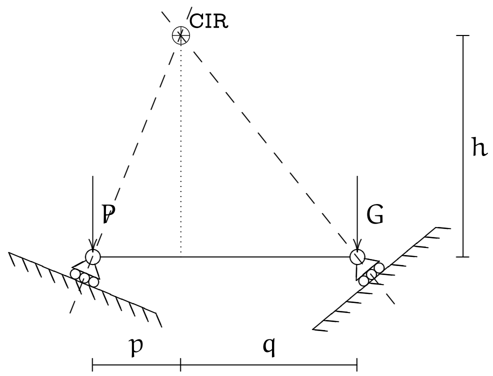
Soluzione 1.5.

Questo esercizio è identico al precedente, semplicemente la fune tesa è sostituita da un'asta compressa (e il piano inclinato è disegnato con un segno grafico differente):



Individuate sul disegno le opportune quote vale ancora il metodo di soluzione dell'esercizio precedente.

Una tecnica alternativa, che non richiede di spezzare il sistema per mettere in evidenza la forza C, è di determinare il CIR dell'asta.



L'equilibrio alla rotazione intorno al CIR (il che equivale al PLV per una rotazione infinitesima intorno allo stesso punto) si scrive

$$P \cdot p - G \cdot q = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{P}{G} = \frac{q}{p}.}$$

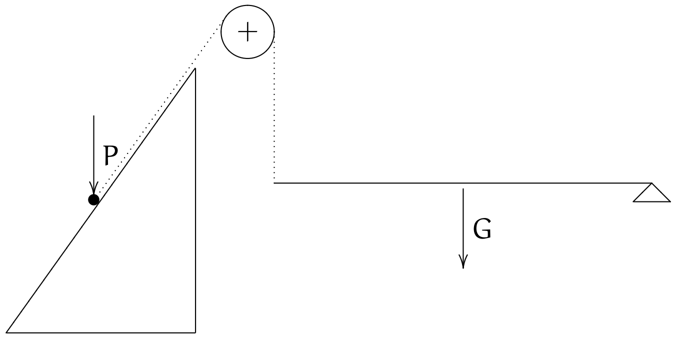
Volendo ricorrere alla trigonometria, indichiamo con α_P e α_G l'inclinazione rispetto all'orizzontale di piani inclinati su cui agiscono le forze P e G rispettivamente. È facile verificare le seguenti soluzioni per i singoli esercizi:

1.3 dal poligono delle forze si ha

$$G = P \tan \alpha_P, \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{G} = \frac{1}{\tan \alpha_P} = \cot \alpha_P,$$

che coincide con la soluzione data osservando che $\tan \alpha_P = \dfrac{h}{b}$;

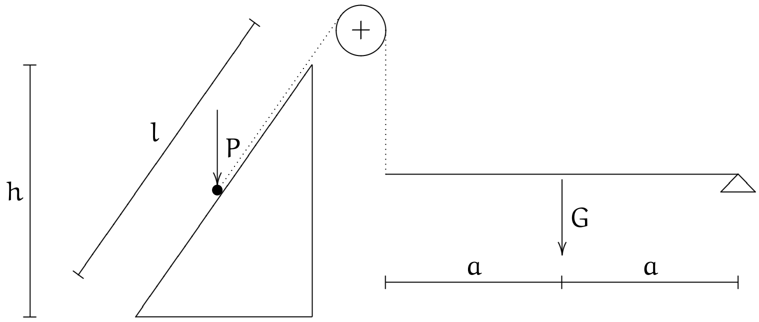
Esercizio 1.6.



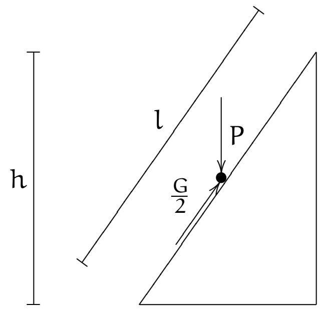
Determinare $\frac{P}{G}$, segnando sul disegno le quote significative.

Soluzione 1.6.

Per prima cosa quotiamo il disegno, osservando che la forza G è a metà della leva.



Eliminando la leva (che dimezza la forza G) e la carrucola il problema si riduce al seguente

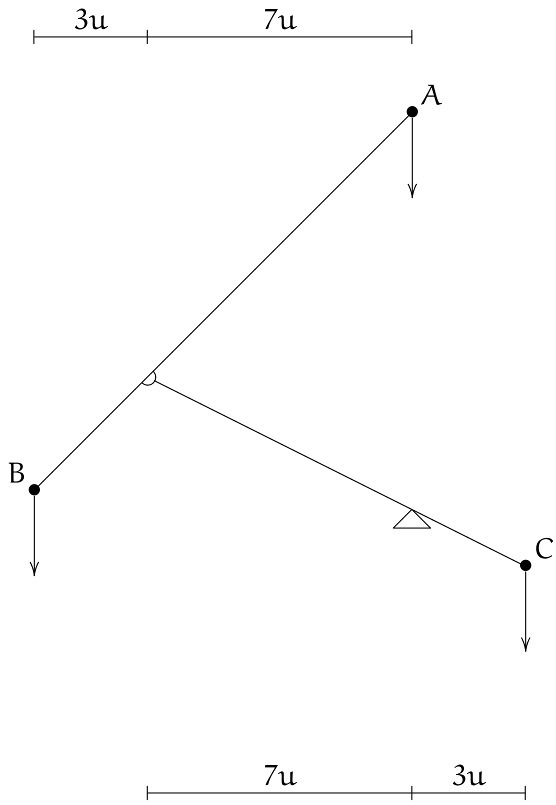


L'esercizio a questo punto è diventato banale ed il risultato vale semplicemente $\frac{P}{G/2} = \frac{l}{h}$, cioè

$$\boxed{\frac{P}{G} = \frac{l}{2h}}$$

Esercizio 1.7.

Lo schema statico di una lampada da tavolo è concepito come nella figura sottostante. A è il riflettore e B e C sono due contrappesi. È possibile determinare il valore di B e C in modo che la lampada sia in equilibrio in ogni posizione? Se il riflettore ha una massa di 350g quale deve essere la massa di B e C?



Soluzione 1.7.

L'equilibrio delle leve, se le forze mantengono direzione costante (in un riferimento assoluto o relativo alla leva) è indipendente dalla posizione della leva stessa. In particolare, quando le forze sono date dal peso, la condizione di equilibrio si può anche esprimere richiedendo che il baricentro della leva stessa cada nel fulcro. Questa condizione è ovviamente indipendente dall'orientazione della leva.

Indicando con $P_{A,B,C}$ e con $M_{A,B,C}$ peso e massa di A, B, C, si ricava facilmente per la leva formata da A e B

$$M_A : M_B = P_A : P_B = 3u : 7u,$$

da cui

$$M_B = \frac{7}{3} M_A.$$

Per la seconda leva si ottiene

$$(M_A + M_B) : M_C = (P_A + P_B) : P_C = 3u : 7u,$$

da cui, con facili passaggi,

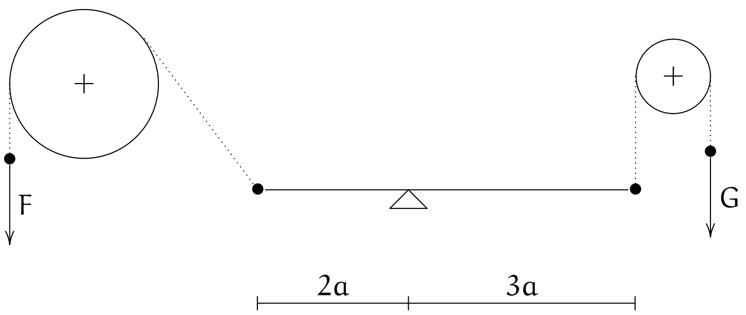
$$M_C = \frac{7}{3}(M_A + M_B) = \frac{70}{9} M_A.$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene approssimativamente

$$M_B = 817g,$$
$$M_C = 2722g.$$

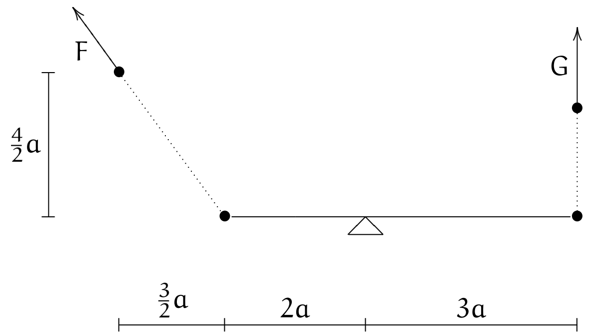
Esercizio 1.8.

Determinare F/G.

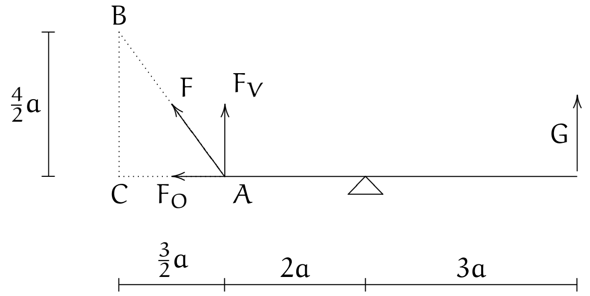


Soluzione 1.8.

Per prima cosa conviene eliminare dal problema le carrucole semplici che hanno solo lo scopo di cambiare la direzione della retta di azione delle forze.



A questo punto si possono trasportare le forze lungo la loro retta di azione fino alla leva, e scomporre la forza F in due componenti, F_O parallela alla leva, e F_V perpendicolare.



È facile scrivere le seguenti relazioni,

$$F_V : G = 3a : 2a, \qquad F : F_V = \overline{AB} : \overline{BC}.$$

Tenuto conto che $\overline{AB} = \frac{5}{2}a$ (i numeri $3, 4, 5$ formano una terna pitagorica!) si ottiene

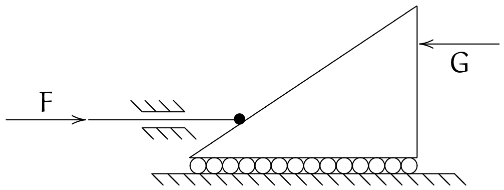
$$\frac{F_V}{G} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{F}{F_V} = \frac{5}{4};$$

moltiplicando membro a membro si ottiene infine

$$\frac{F}{G} = \frac{15}{8} = 1.875\,.$$

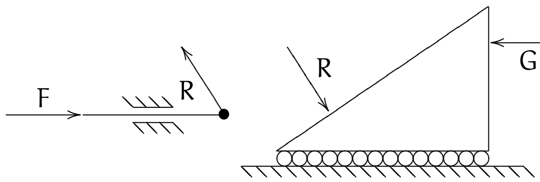
Esercizio 1.9.

Determinare il valore del rapporto F/G, nell'ipotesi che tutti i vincoli siano lisci (no attrito) e bilateri (no ribaltamento).



Soluzione 1.9.

Per risolvere questo esercizio si potrebbe scomporre il sistema nelle sue parti e, mettendo in evidenza le forze scambiate, scrivere le equazioni cardinali della statica.



In realtà molto più semplicemente si può osservare che dato uno spostamento virtuale du al cuneo, entrambi i punti di applicazioni delle forze si spostano della stessa quantità du. Dato che le forze sono controverse, il PLV si scrive

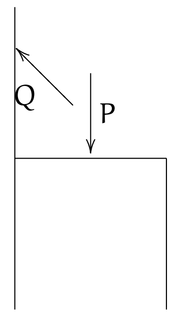
$$F \cdot du - G \cdot du = 0,$$

e dunque banalmente

$$F = G.$$

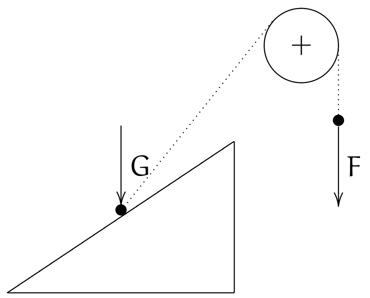
Esercizio 1.10.

Determinare per quali valori di Q, fissato P, la sedia in figura si ribalta.



Esercizio 1.11.

Determinare F/G nell'ipotesi che tutti i vincoli siano lisci (no attrito).



Esercizio 1.12.

Determinare il valore del rapporto F/G, nell'ipotesi che tutti i vincoli siano lisci (no attrito) e bilateri (no ribaltamento).