Materiale ad esclusivo uso degli studenti del corso di
Tecnica delle Costruzioni Meccaniche
http://www.mecc.polimi.it/~miccoli/TCM/
tenuto presso il Politecnico di Milano, III Facoltà di Architettura-Design.

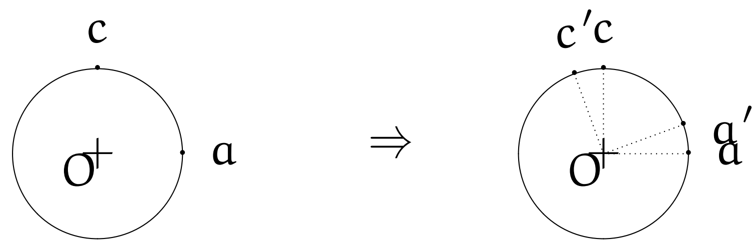
Anno Accademico 2004/2005, versione del 10 novembre 2004

Stefano Miccoli

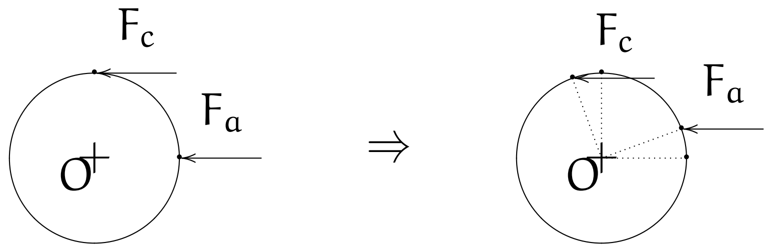
Tecnica delle Costruzioni Meccaniche

lavoro di forze costanti per una rotazione rigida

si consideri una rotazione finita θ intorno all'origine,



e si applichino due forze costanti in a e c



in formule si ha

$$a \longrightarrow a' \qquad\qquad (r, 0) \longrightarrow (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$c \longrightarrow c' \qquad\qquad (0, r) \longrightarrow (-r\sin\theta, r\cos\theta)$$

$$\mathcal{L}_{F_a}(\theta) = r(1 - \cos\theta) \cdot F_a$$

$$\mathcal{L}_{F_c}(\theta) = r\sin\theta \cdot F_c$$

valutiamo il differenziale di $\mathcal{L}(\theta)$,
(ricordando che $\frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\sin\theta$, $\frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta$)

$$d\mathcal{L}_{F_a}(\theta) = r\sin\theta \; d\theta \cdot F_a$$

$$d\mathcal{L}_{F_c}(\theta) = r\cos\theta \; d\theta \cdot F_c$$

il differenziale esprime il lavoro che si compie per una rotazione infinitesima da θ a $\theta + d\theta$, e risulta una funzione dell'angolo di partenza θ

l'espressione del differenziale, considerando la condizione iniziale $\theta = 0$ è

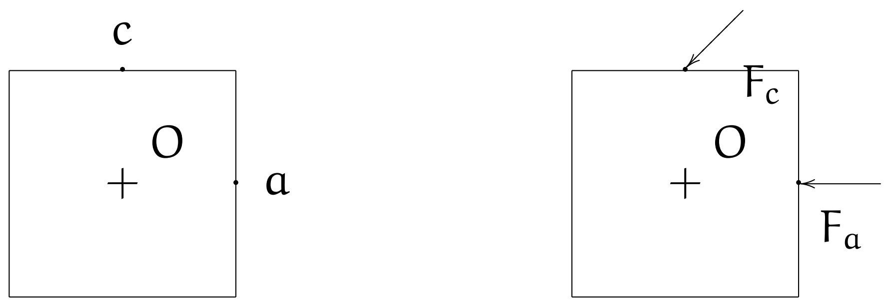
$$\begin{aligned} d\mathcal{L}_{F_a} &= 0 \\ d\mathcal{L}_{F_c} &= \underbrace{r \cdot F_c}_{M_c} \ d\theta \end{aligned}$$

in generale,

- per una rotazione rigida di un corpo rigido intorno ad un polo O, il differenziale del lavoro di forze costanti è pari alla somma dei momenti moltiplicata $d\theta$:

$$d\mathcal{L} = \left(\sum M_O\right) d\theta$$

differenziale del lavoro di forze costanti per traslazioni rigide



essendo il moto una traslazione rigida, $\vec{u}_O = \vec{u}_a = \vec{u}_c$

$$\mathcal{L} = \vec{F}_a \cdot \vec{u}_a + \vec{F}_c \cdot \vec{u}_c = (\vec{F}_a + \vec{F}_c) \cdot \vec{u}_O = (\sum \vec{F}) \cdot \vec{u}_O$$

$$d\mathcal{L} = (\sum \vec{F}) \cdot d\vec{u}_O$$

equazioni cardinali della statica e lavoro delle forze attive
caso generale 2D: principio di lavori virtuali

equilibrio alla traslazione   equilibrio alla rotazione

$$\boxed{\sum \vec{F} = \vec{0}} \qquad \boxed{\sum M = 0}$$

$$\boxed{d\mathcal{L} = 0, \quad \forall d\vec{u}_R}$$

$d\mathcal{L}$ differenziale del lavoro delle forze attive per una generica roto-traslazione rigida $\vec{u}_R$.

principio di lavori virtuali

PLV

$$\boxed{d\mathcal{L} = 0, \quad \forall d\vec{u}_R}$$

$d\mathcal{L}$ è differenziale del lavoro delle forze attive per una generica roto-traslazione rigida $\vec{u}_R$:

$$d\mathcal{L} = \sum \vec{F} \cdot d\vec{u}_O + \sum M_O \, d\theta$$

dove la traslazione rigida è scomposta in una traslazione rigida $d\vec{u}_O$ ed in una rotazione attorno al punto O.

atto di moto

- differenziale dello spostamento
- spostamento infinitesimo
- atto di moto

sono concetti equivalenti.

cinematica del corpo rigido nel piano
atto di moto

si considerano solo spostamenti infinitesimi, si ha dunque un atto di moto.

traslazione rigida $d\vec{u}_R$**:** tutti i punti del corpo rigido hanno lo stesso spostamento.

$$d\vec{u}(\vec{x}) = d\vec{u}_R$$

rotazione rigida $d\theta$ **intorno ad** O**:** ogni punto P subisce uno spostamento $d\vec{u}$ che è in direzione perpendicolare a $P - O$, ed in intensità pari a $|P - O|\, d\theta$. Il verso è stabilito dalla convenzione che le rotazioni positive sono quelle *anti-orarie*.

rototraslazione rigida: il generico atto di moto può essere concepito come una rotazione rigida intorno ad un polo O seguita da una traslazione rigida.

composizione di atti di moto

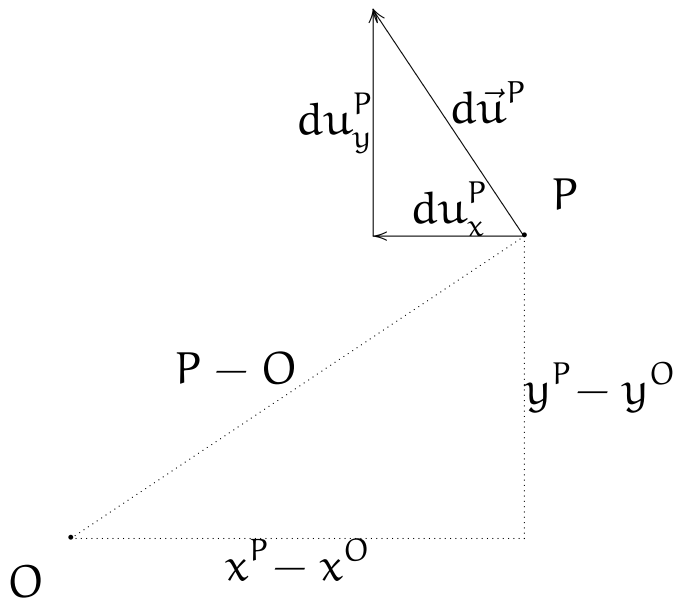
è possibile "comporre" gli atti di moto:

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$$

la composizione degli atti di moto è commutativa

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{B} + \mathcal{A}$$

espressione algebrica della rotazione rigida di P intorno ad O



$$\begin{cases} du_x^P = -d\theta(y^P - y^O) \\ du_y^P = d\theta(x^P - x^O) \end{cases}$$

infatti la similitudine dei triangoli implica

$$du_x^P : |d\vec{u}| = (y^P - y^O) : |P - O|;$$

scrivendo che il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi e sostituendo $|\vec{du}| = d\theta|P - O|$ si ottiene

$$du_x^P \cdot |P - O| = d\theta|P - O| \cdot (y^P - y^O)$$

cioè

$$du_x^P = d\theta(y^P - y^O)$$

espressione algebrica della rototraslazione rigida

sommando all'espressione precedente le componenti dello spostamento di O si ottiene l'espressione della generica rototraslazione rigida.

$$\begin{cases} du_x^P = -d\theta(y^P - y^O) + du_x^O \\ du_y^P = d\theta(x^P - x^O) + du_y^O \end{cases}$$