

Tecnica delle Costruzioni Meccaniche
Stefano Miccoli
Anno Accademico 1999–2000

Esercizi 1999/2000
19 dicembre 2000

Documento composto il 19 dicembre 2000.

La versione più aggiornata di questo documento è disponibile in

<http://www.mecc.polimi.it/~miccoli/TCM/esercizi1999.pdf>

Materiale ad esclusivo uso degli studenti del corso di

Tecnica delle Costruzioni Meccaniche
<http://www.mecc.polimi.it/~miccoli/TCM>

tenuto presso il Politecnico di Milano, Facoltà di Architettura, Campus Leonardo.

Copyright © 2000 by [Stefano Miccoli](#). This material may be distributed only subject to the terms and conditions set forth in the Open Publication License, v1.0 or later (the latest version is presently available at <http://www.opencontent.org/openpub/>).

Distribution of substantively modified versions of this document is prohibited without the explicit permission of the copyright holder.

Distribution of the work or derivative of the work in any standard (paper) book form is prohibited unless prior permission is obtained from the copyright holder.

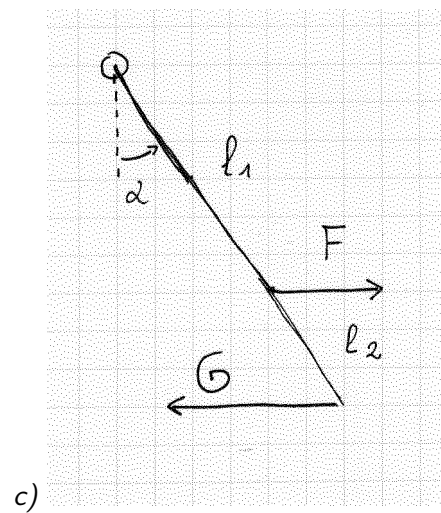
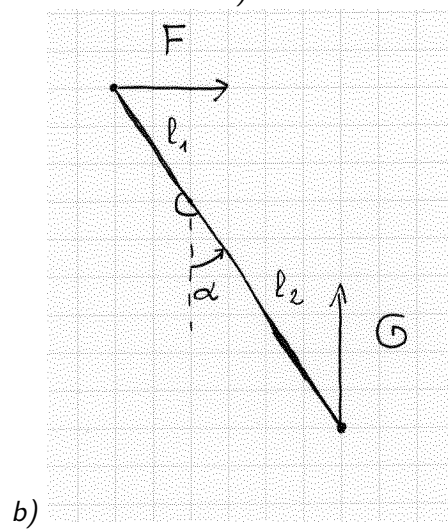
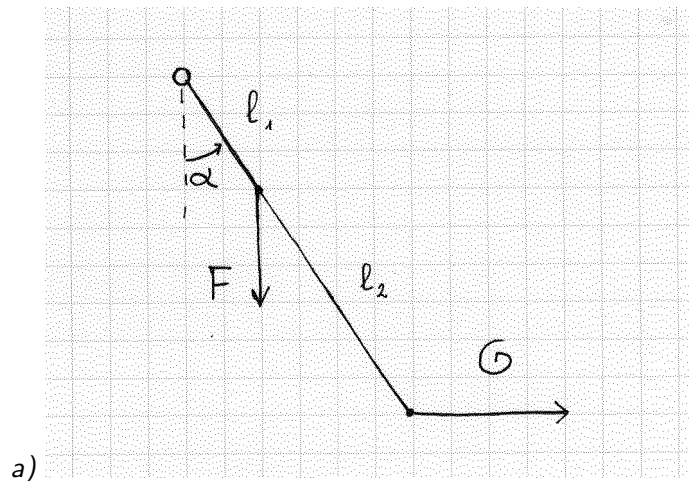
È permessa la riproduzione fotostatica di queste pagine e la loro distribuzione agli studenti del Corso di Laurea in Disegno Industriale del Politecnico di Milano, purché questa pagina rimanga inalterata.

Indice

1	Svolgimento degli esercizi del 6 marzo 2000	3
2	Svolgimento degli esercizi del 28 marzo 2000	11
3	Svolgimento degli esercizi del 25 maggio 2000	18
	Bibliografia	29

1 Svolgimento degli esercizi del 6 marzo 2000

ESERCIZIO 1.



1. Fissato α , l_1 , l_2 , F , determinare G perché le leve in figura siano in equilibrio.
2. Fissato $l_2/l_1 = 2$ tracciare il diagramma di G/F in funzione di α (per $0 \leq \alpha < 2\pi$).
3. Supporre G fisso e F variabile e tracciare in modo analogo il diagramma di F/G in funzione di α .

4. Discutere per quali valori di α , dato F , non è possibile trovare un G che equilibri la leva; ripetere il ragionamento nel caso sia assegnato G ed incognito F . Osservare cosa accade dei valori G/F e F/G nei diagrammi ai punti precedenti per questi valori "speciali" di α .

SVOLGIMENTO 1.

1. Le equazioni di equilibrio per le tre leve sono le seguenti

$$-Fl_1 \sin \alpha + G(l_1 + l_2) \cos \alpha = 0, \quad (1.1a)$$

$$-Fl_1 \cos \alpha + Gl_2 \sin \alpha = 0, \quad (1.1b)$$

$$Fl_1 \cos \alpha + G(l_1 + l_2) \cos \alpha = 0; \quad (1.1c)$$

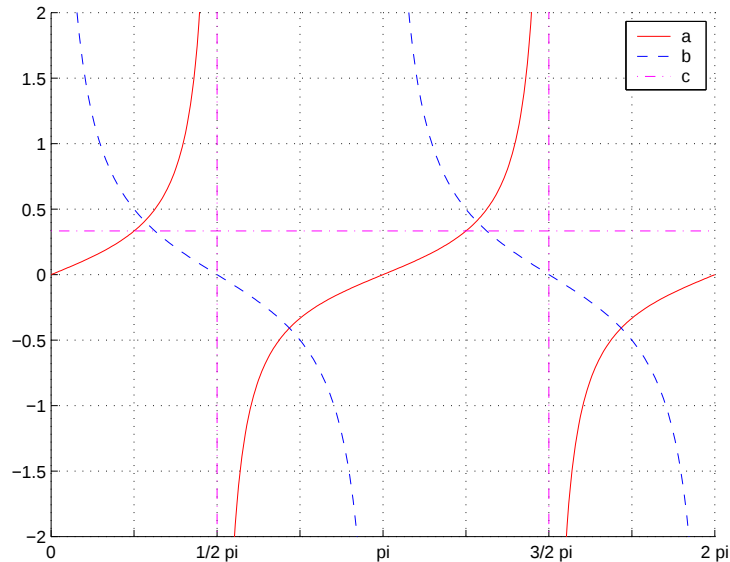
risolvendo rispetto a G si ottiene

$$G = \begin{cases} F \frac{l_1}{l_1 + l_2} \tan \alpha, & \text{per } \alpha \neq \pi/2 + n\pi, \\ \text{non definito}, & \text{per } \alpha = \pi/2 + n\pi; \end{cases} \quad (1.2a)$$

$$G = \begin{cases} F \frac{l_1}{l_2} \cot \alpha, & \text{per } \alpha \neq n\pi, \\ \text{non definito}, & \text{per } \alpha = n\pi; \end{cases} \quad (1.2b)$$

$$G = \begin{cases} F \frac{l_1}{l_1 + l_2}, & \text{per } \alpha \neq \pi/2 + n\pi, \\ \text{qualsiasi}, & \text{per } \alpha = \pi/2 + n\pi. \end{cases} \quad (1.2c)$$

2. Il diagramma delle formule (1.2a)–(1.2c) è il seguente.



3. (Seguire la traccia dei due punti precedenti.)
4. Fissiamo l'attenzione sull'equazione (1.1a). Per risolvere rispetto a G dobbiamo portare F a secondo membro e dividere membro a membro per $(l_1 + l_2) \cos \alpha$: ciò è possibile solamente quando $\cos \alpha \neq 0$, cioè $\alpha \neq \pi/2 + n\pi$. Se per esempio $\alpha = \pi/2$, l'equazione (1.1a) si riduce a

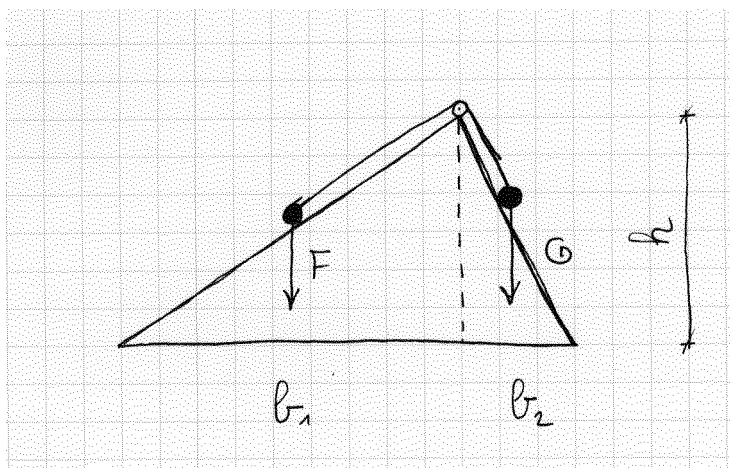
$$-Fl_1 + G(l_1 + l_2) \cdot 0 = 0;$$

Questa equazione evidentemente non ammette soluzioni se $F \neq 0$; se invece $F = 0$, allora G è indeterminato, in quanto l'equazione precedente si riduce a $0 = 0$.

L'interpretazione meccanica di ciò è legata al fatto che G è allineata con la leva quando $\alpha = \pi/2$. In questa situazione la forza G non ha momento rispetto al fulcro: in assenza di una forza F si ha equilibrio per ogni G , mentre per $F \neq 0$ l'equilibrio è impossibile. Si noti che quando α tende a $\pi/2$ per mantenere l'equilibrio è necessaria una forza G molto maggiore di F : matematicamente si può dire che per $\alpha \rightarrow \pi/2$ si ha $|G/F| \rightarrow \infty$, come si vede anche dal diagramma precedente.

Analoghe considerazioni valgono anche quando è assegnata G ed incognita F . In questo caso l'equilibrio diventa impossibile quando F è allineata con la leva.

ESERCIZIO 2.



Due masse, di peso F e G , sono poste su un piano inclinato e sono collegata da una fune che scorre su una puleggia all'apice del piano inclinato.

1. Fissati b_1 , b_2 , h , F , determinare G in modo che il sistema sia in equilibrio.

1 Svolgimento degli esercizi del 6 marzo 2000

2. Tracciare il diagramma di G/F in funzione di b_2 ($b_2 > 0$), assumendo $b_1 = 2h$.
3. Determinare la tensione nella fune.

SVOLGIMENTO 2.

1. Chiamiamo $l_1 = \sqrt{b_1^2 + h^2}$ e $l_2 = \sqrt{b_2^2 + h^2}$ le lunghezze dei due piani inclinati.

Supponiamo che la massa di peso F abbia uno spostamento verticale di dy_1 (positivo verso l'alto): a questo innalzamento corrisponde uno spostamento lungo il piano inclinato (positivo da sinistra a destra) pari a $d\xi_1 = dy_1 l_1/h$. Corrispondentemente la seconda massa subisce un abbassamento $-dy_2$ a cui corrisponde uno spostamento lungo il piano inclinato pari a $d\xi_2 = -dy_2 l_2/h$. Gli spostamenti delle due masse lungo i rispettivi piani inclinati devono essere uguali, dato che la lunghezza della fune non cambia; in formule dunque da $d\xi_1 = d\xi_2$, si ottiene

$$\frac{dy_1}{dy_2} = -\frac{l_2}{l_1} = -\frac{\sqrt{b_2^2 + h^2}}{\sqrt{b_1^2 + h^2}}. \quad (1.3)$$

Il PLV per questo sistema si scrive

$$-F \cdot dy_1 - G \cdot dy_2 = 0, \quad (1.4)$$

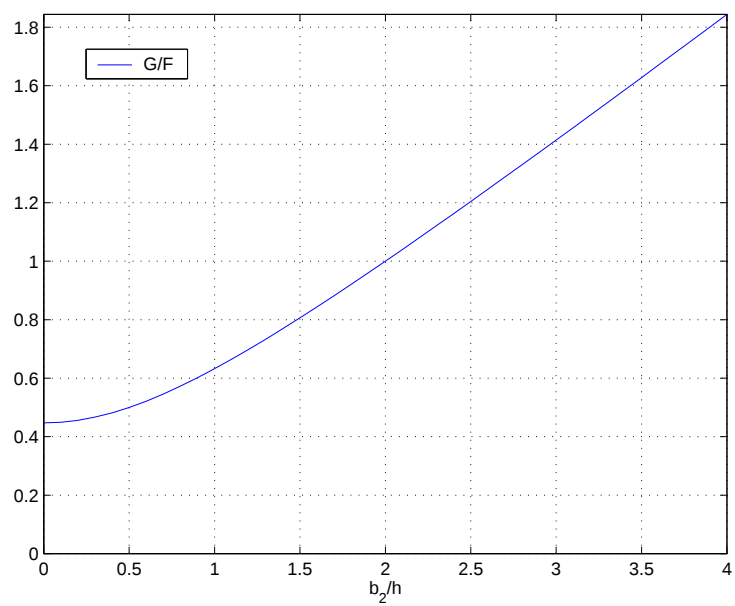
dal quale, con semplici passaggi si ottiene

$$G = -F \frac{dy_1}{dy_2} = F \frac{\sqrt{b_2^2 + h^2}}{\sqrt{b_1^2 + h^2}} \quad (1.5)$$

2. Per tracciare il diagramma di G/F conviene modificare ulteriormente la formula precedente per ottenere (si ricordi che $b_1 = 2h$)

$$\frac{G}{F} = \frac{\sqrt{\left(\frac{b_2}{h}\right)^2 + 1}}{\sqrt{\left(\frac{b_1}{h}\right)^2 + 1}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{b_2}{h}\right)^2 + 1}}{\sqrt{5}}. \quad (1.6)$$

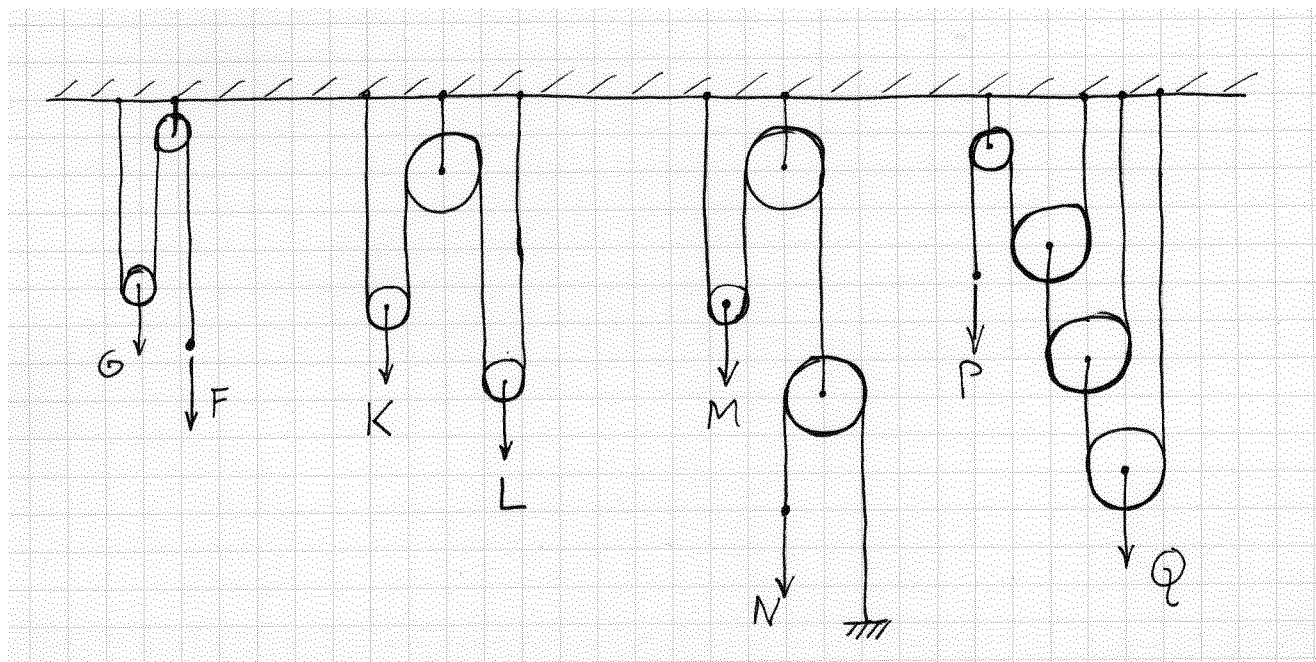
1 Svolgimento degli esercizi del 6 marzo 2000



3. Chiamata T la tensione nella fune, sempre dal PLV si ha $T \cdot d\xi_1 - F \cdot dy_1 = 0$; da questa equazione deriva

$$T = F \frac{dy_1}{d\xi_1} = F \frac{h}{l_1} = F \frac{1}{\sqrt{5}}. \quad (1.7)$$

ESERCIZIO 3.



1. Determinare G/F , K/L , M/N , P/Q .
2. Spiegare se la risposta al punto precedente è dipendente dai diametri delle pulegge e perché.

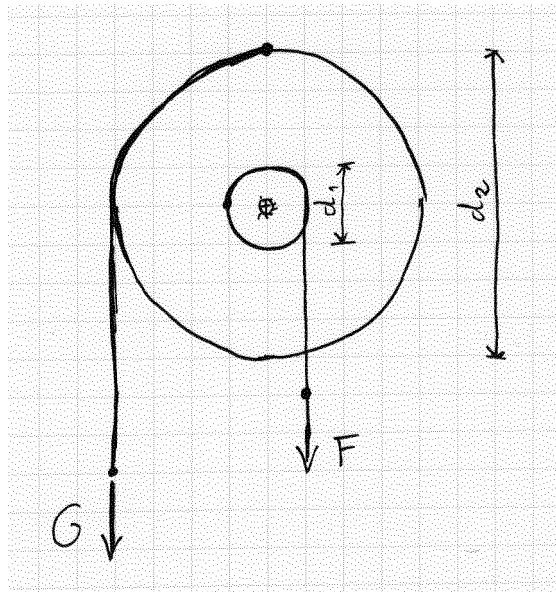
SVOLGIMENTO 3.

1. Per determinare il rapporto delle forze applicate si può procedere in due modi.
 - Determinare geometricamente quale è il rapporto tra gli spostamenti dei punti di applicazione delle forze e applicare il PLV. Analogamente a quanto visto per leve e piani inclinati, il rapporto tra le forze è inversamente proporzionale al rapporto tra gli spostamenti.
 - Determinare la tensione nelle funi imponendo che il momento delle forze applicate alle pulegge e la loro risultante siano nulli.

$$\frac{G}{F} = 2 \quad \frac{K}{L} = 1 \quad \frac{M}{N} = 4 \quad \frac{P}{Q} = \frac{1}{8} \quad (1.8)$$

2. Applicando il PLV si vede immediatamente che le relazioni tra gli spostamenti dei punti di applicazione delle forze esterne non dipendono dal diametro delle pulegge e dunque neanche il rapporto tra le forze stesse.

ESERCIZIO 4.



Determinare F/G . Qual'è la differenza rispetto ai sistemi precedenti?

SVOLGIMENTO 4.

Come nel caso precedente è possibile applicare sia il PLV che l'equilibrio dei momenti: è facile ottenere dall'equilibrio dei momenti rispetto al centro di rotazione

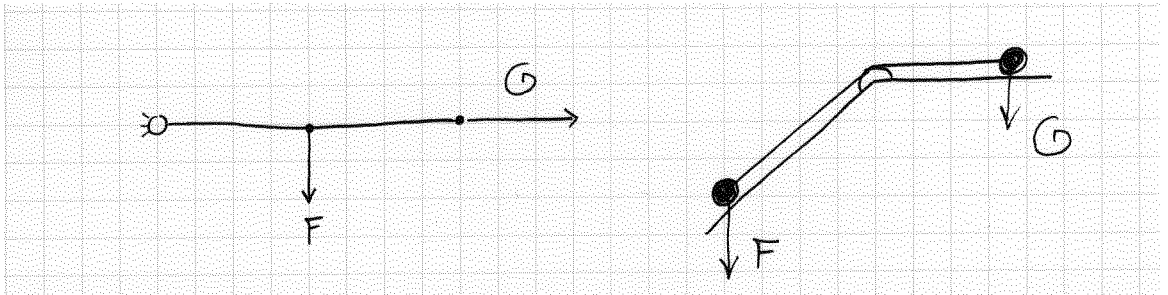
$$-F \frac{d_1}{2} + G \frac{d_2}{2} = 0,$$

da cui si ottiene

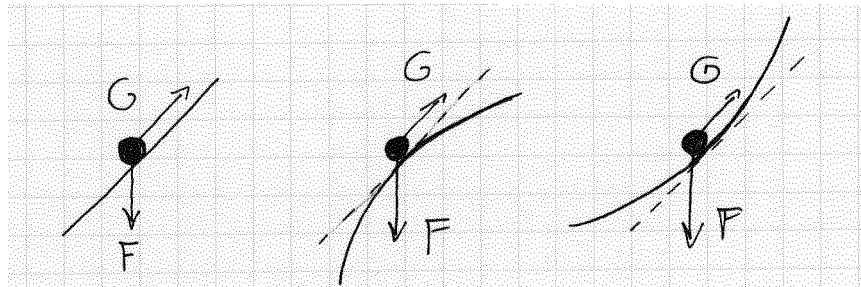
$$\frac{F}{G} = \frac{d_2}{d_1}. \quad (1.9)$$

ESERCIZIO 5.

1. Spiegare, mediante il PLV, perché i seguenti sistemi, per $F \neq 0$ non possono essere in equilibrio.



2. Scrivere il PLV per i seguenti sistemi



SVOLGIMENTO 5.

1. Si può osservare che dato uno spostamento virtuale ai due sistemi, la forza F compie lavoro, mentre la forza G no: dunque per qualsiasi valore di essa il lavoro virtuale è diverso da zero e dunque l'equilibrio non è possibile.
2. Chiamato $d\xi$ lo spostamento virtuale del punto materiale in direzione della forza G e dy lo spostamento in direzione della forza F (positivo verso il basso), il PLV si scrive

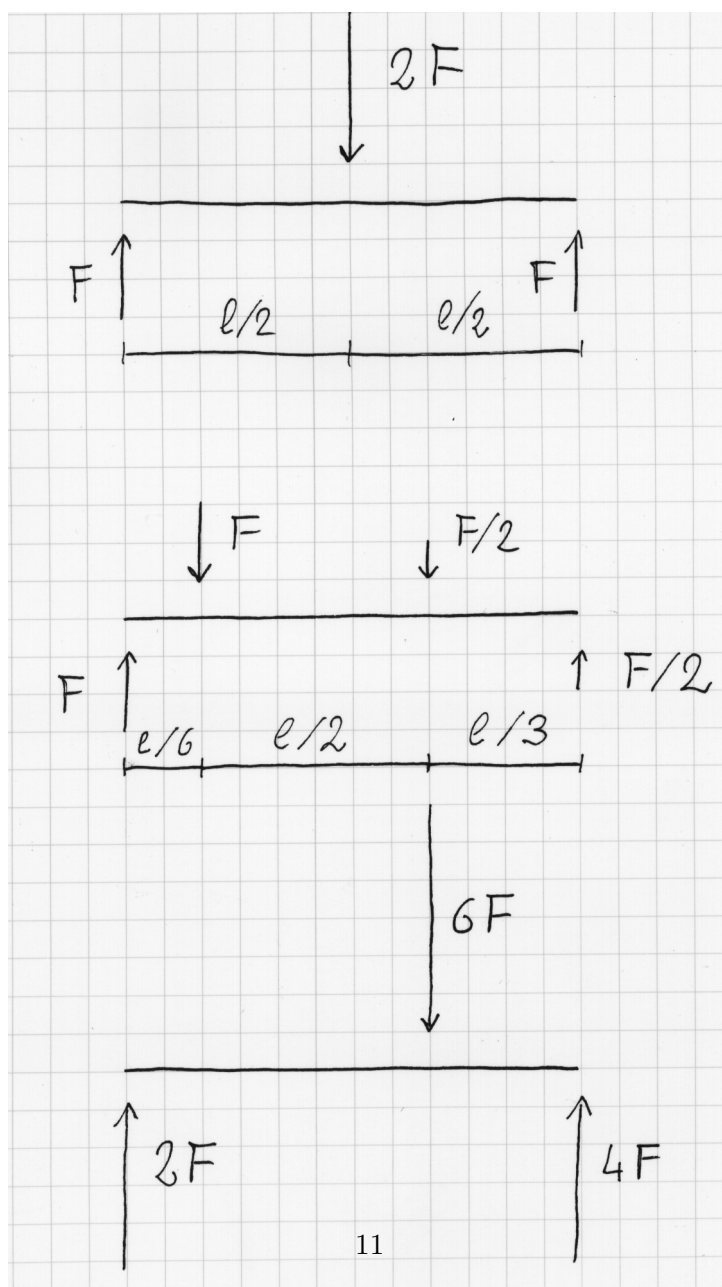
$$G \cdot d\xi + F \cdot dy = 0. \quad (1.10)$$

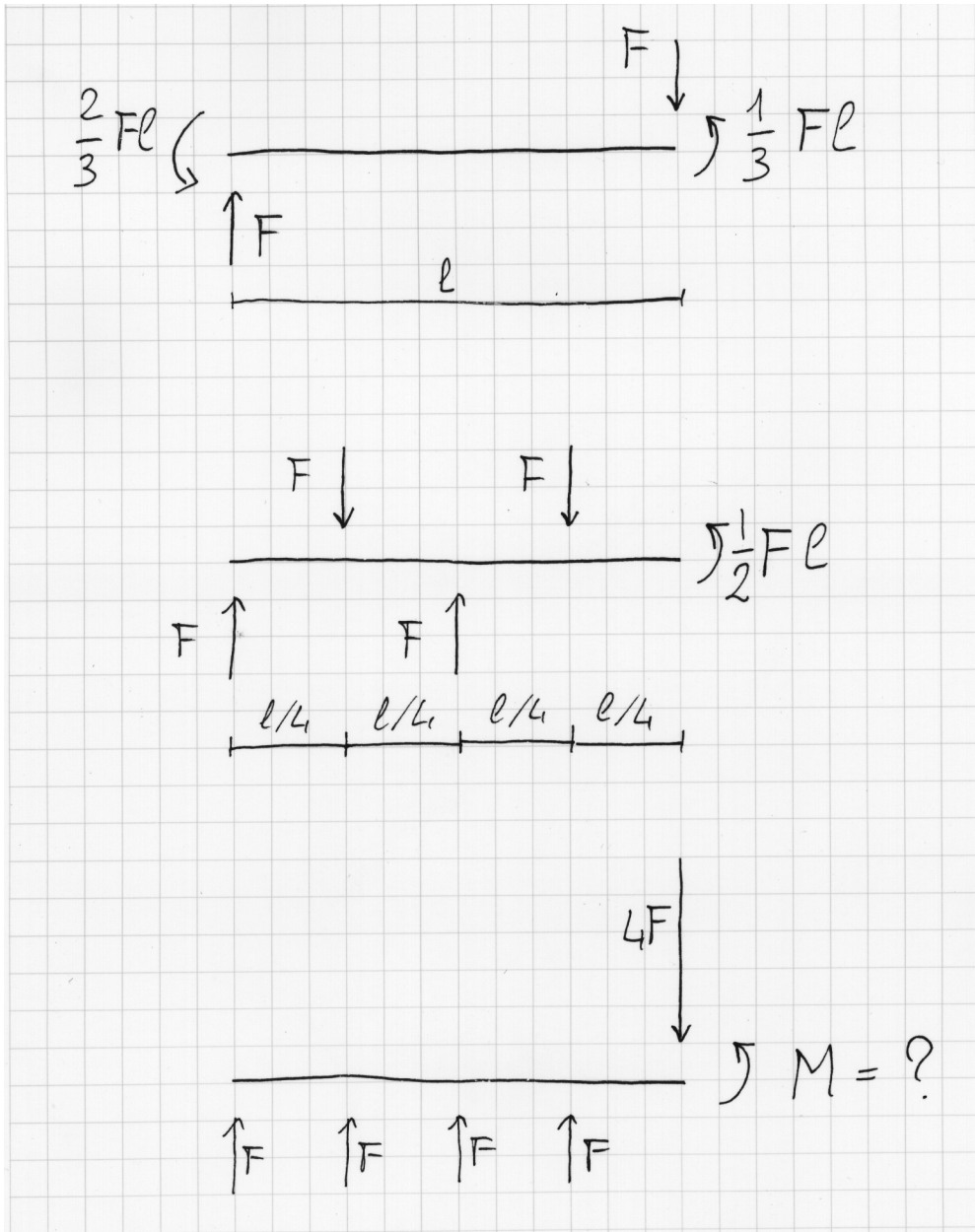
Per tutti e tre i sistemi il rapporto $dy/d\xi$ è uguale, in quanto per *spostamento virtuale* si intende uno spostamento infinitesimo nell'intorno della posizione di equilibrio. Ciò comporta, nel caso in esame, di confondere l'arco con la tangente; avendo tutte le curve la medesima tangente, detto α l'angolo formato da essa con l'orizzontale, si ha $dy/d\xi = -\sin \alpha$.

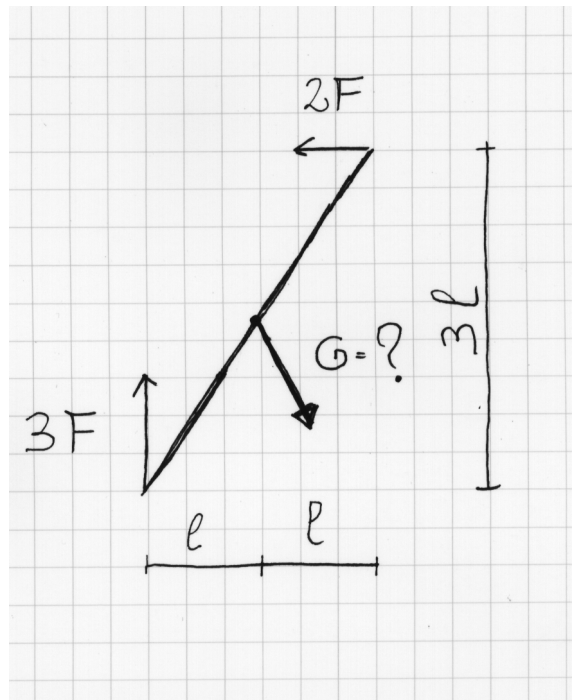
2 Svolgimento degli esercizi del 28 marzo 2000

ESERCIZIO 1.

Determinare il diagramma delle azioni interne N , T , M , per le seguenti aste.

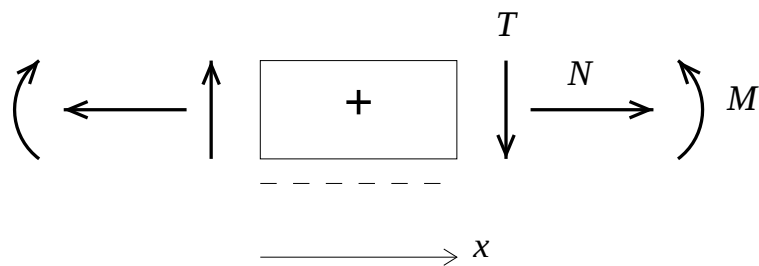






SVOLGIMENTO 1.

Per tracciare il diagramma delle azioni interne è utile fissare un'ascissa curvilinea x lungo l'asta e studiare le funzioni $N(x)$, $T(x)$, $M(x)$. Le convenzioni di segno adottate sono le seguenti:



Con queste convenzioni di segno valgono le seguenti osservazioni.

- In presenza solo di forze esterne concentrate lungo l'asse della trave i diagrammi di $N(x)$ e $T(x)$ sono costanti a tratti. Le discontinuità avvengono in corrispondenza dei punti di applicazione delle forze esterne; l'entità della discontinuità è pari, in modulo, al modulo della forza esterna. Più precisamente la componente della forza esterna

diretta come l'asse della trave causa una discontinuità di $N(x)$, mentre la componente normale causa una discontinuità di $T(x)$.

- Il diagramma del momento è continuo se non sono presenti momenti concentrati, discontinuo se sono presenti momenti concentrati, con discontinuità pari al modulo del momento applicato.
- La derivata del momento è pari al taglio:

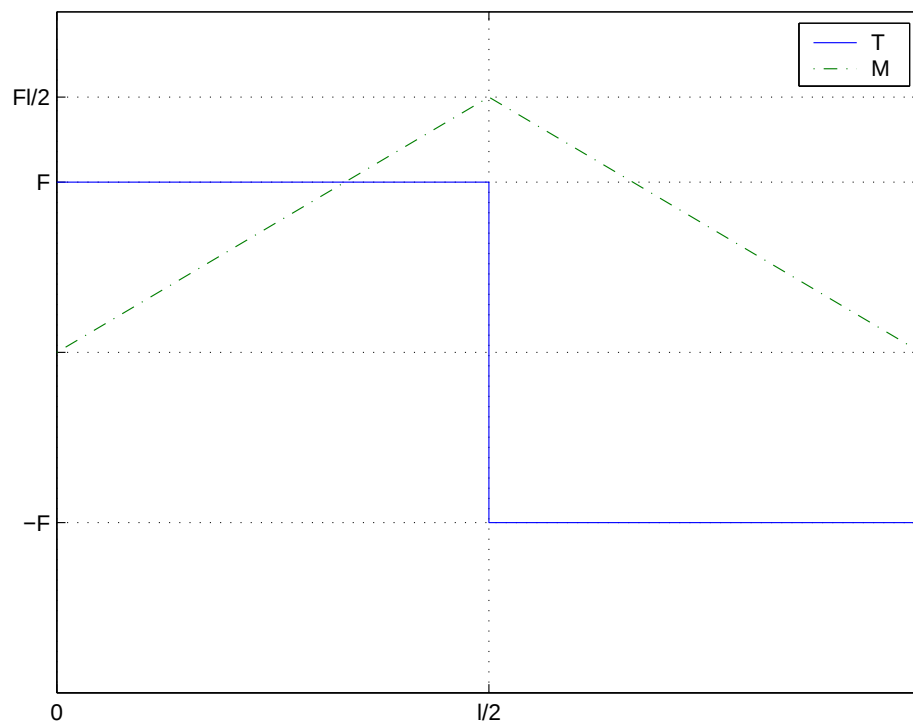
$$\frac{d}{dx}M(x) = T(x); \quad (2.1)$$

dunque in presenza di sole forze esterne concentrate il diagramma del momento è lineare a tratti e continuo. Se sono presenti momenti esterni il diagramma diventa lineare a tratti e discontinuo.

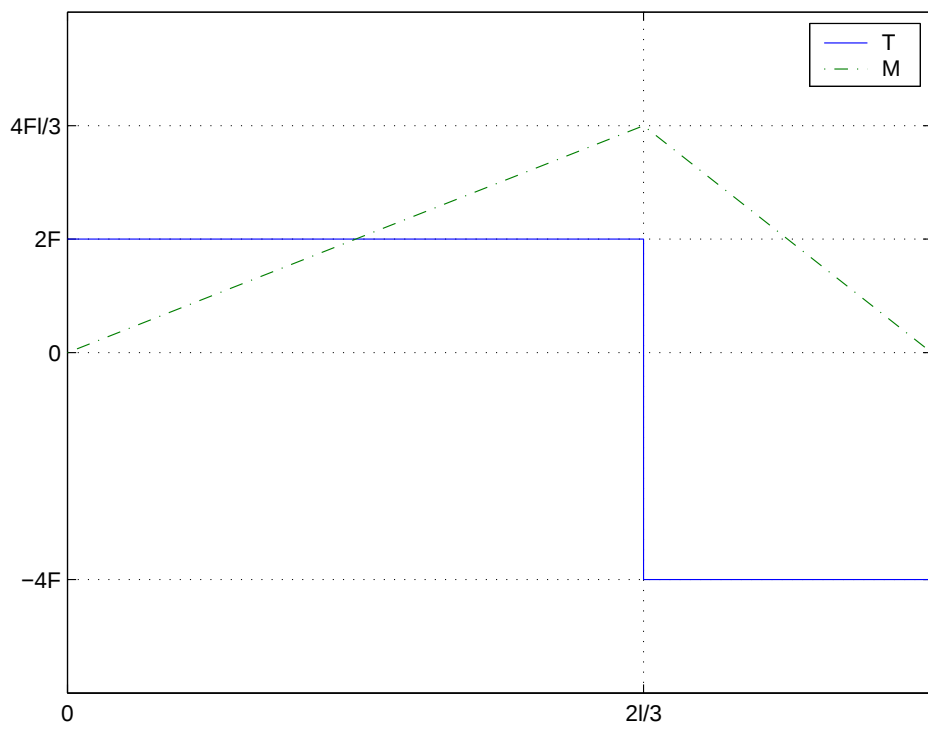
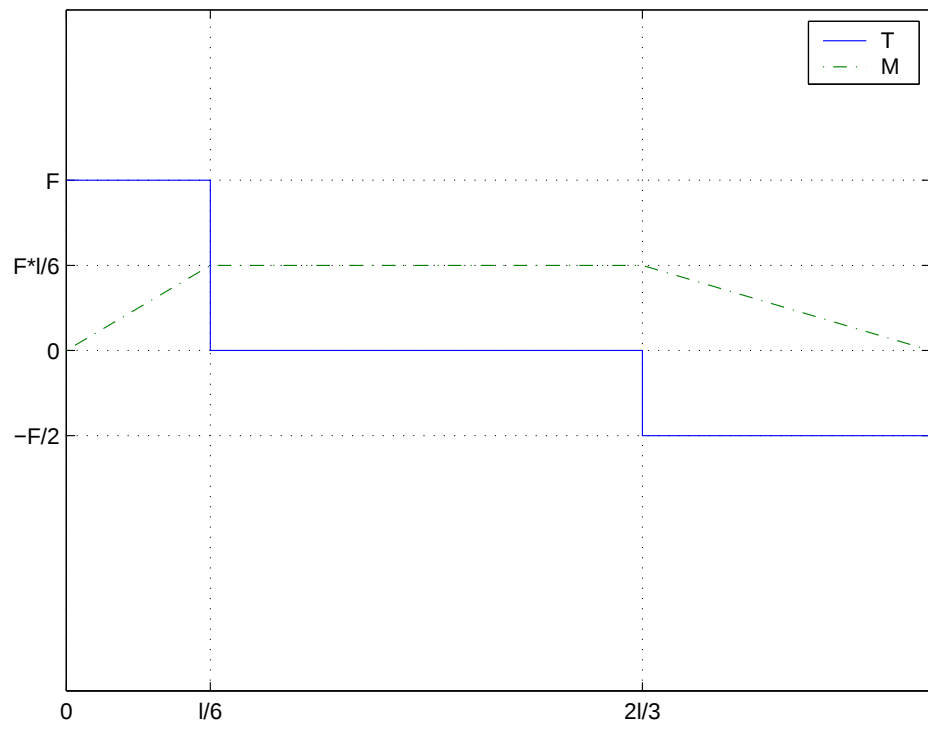
- Se agli estremi dell'asta non sono presenti azioni esterne, i diagrammi delle azioni interne si annullano; al contrario se sono presenti azioni esterne, le azioni interne, con le opportune considerazioni sul segno, saranno uguali alle azioni esterne.

Seguono le soluzioni degli esercizi proposti.

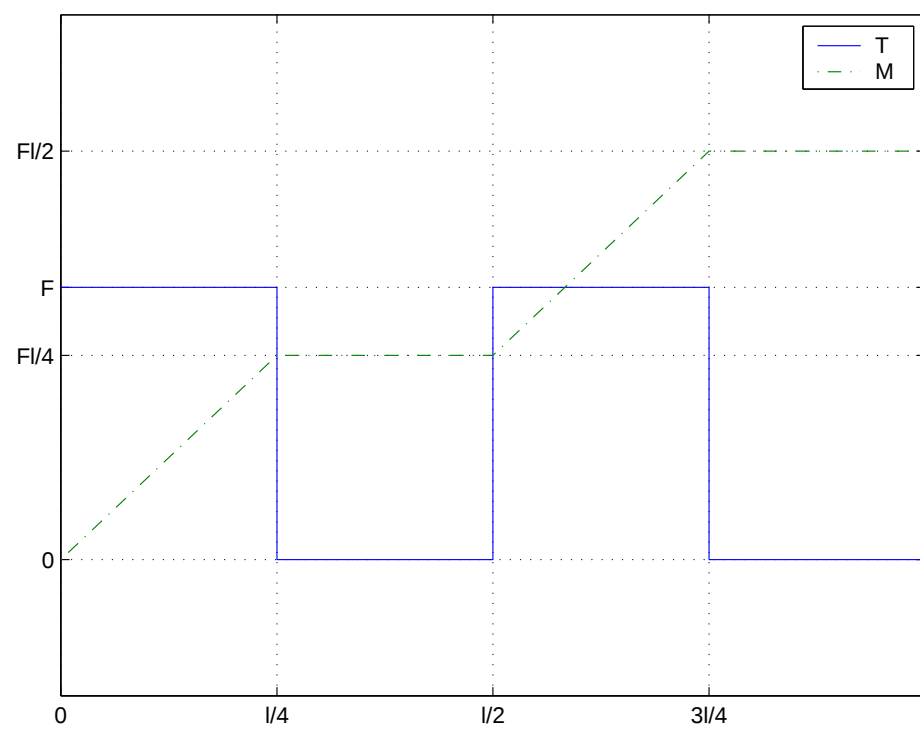
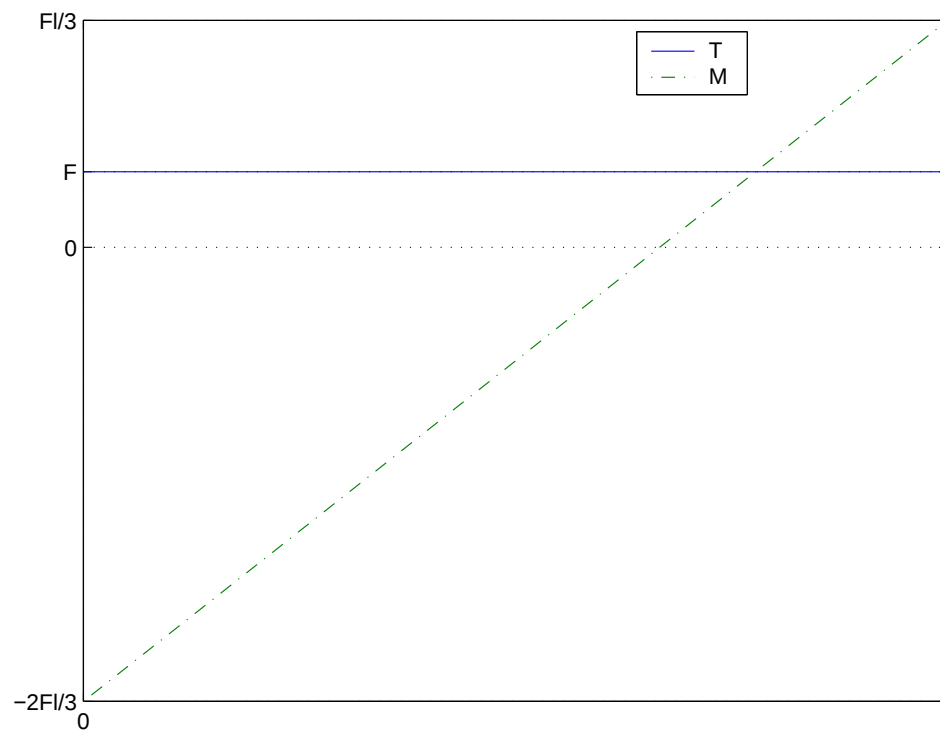
- Pagina 11



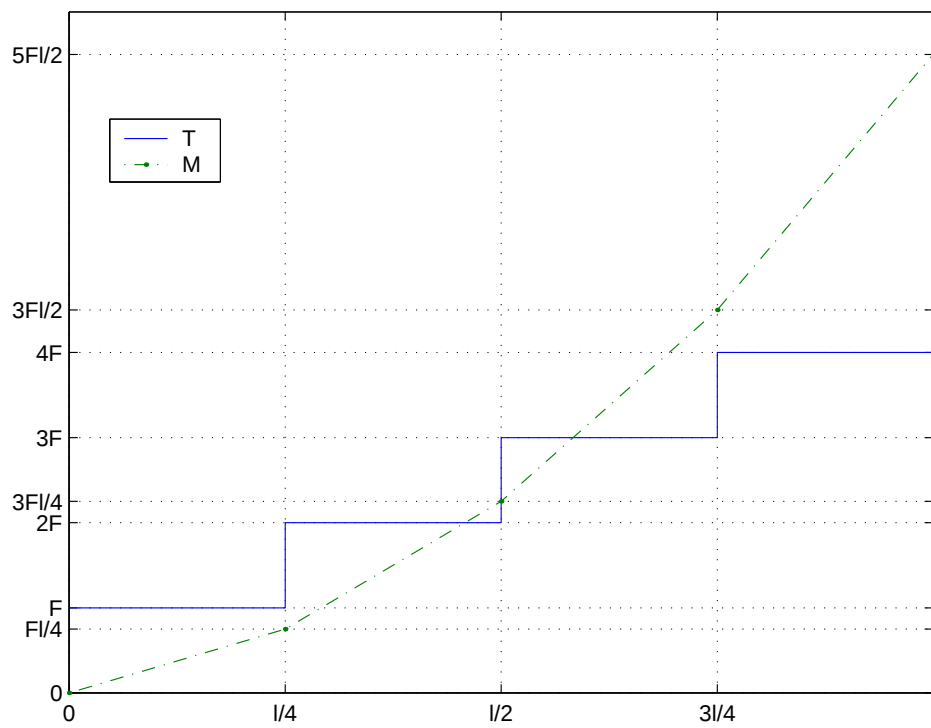
2 Svolgimento degli esercizi del 28 marzo 2000



- Pagina 12



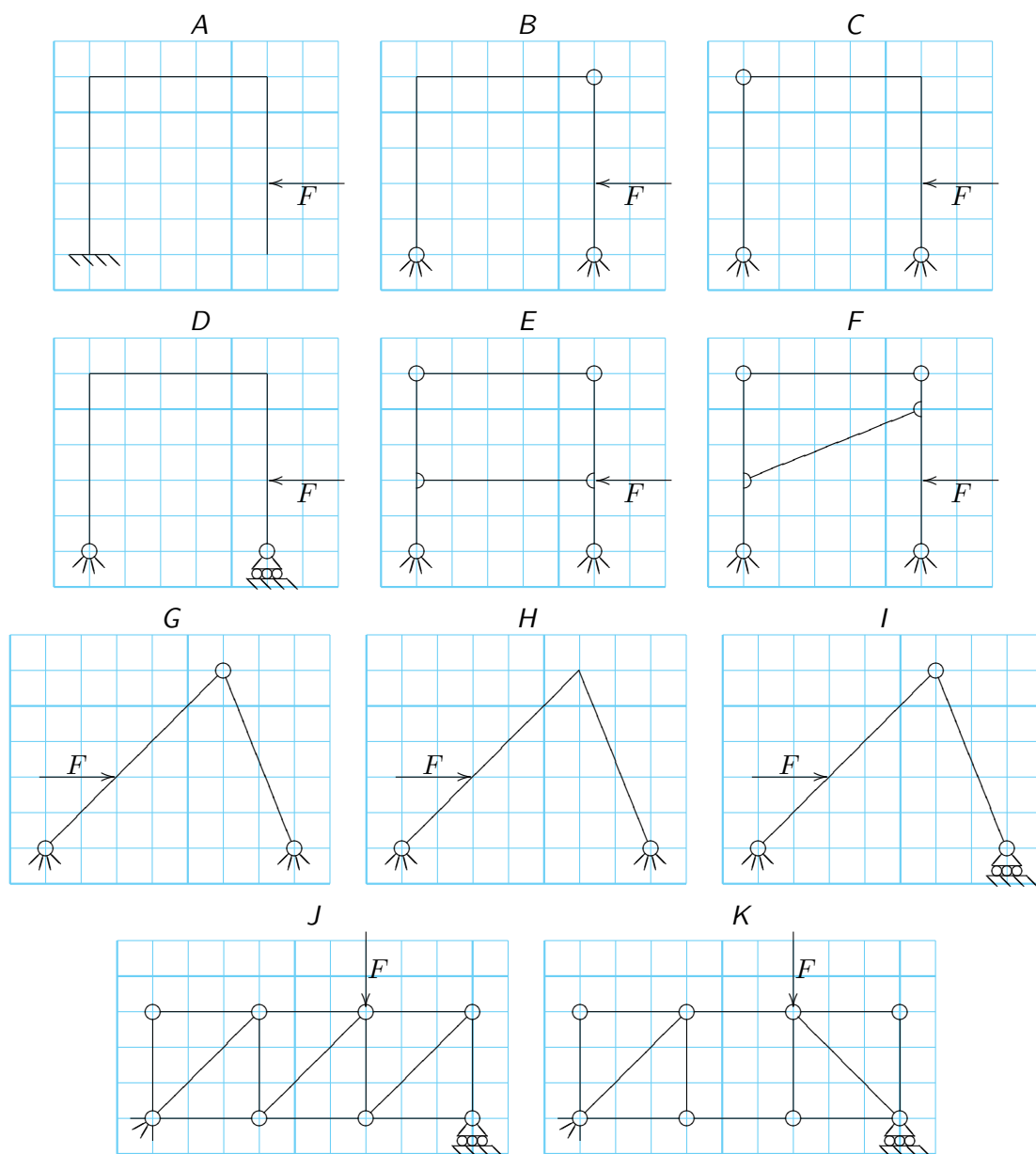
2 Svolgimento degli esercizi del 28 marzo 2000



3 Svolgimento degli esercizi del 25 maggio 2000

ESERCIZIO 1.

Eseguire l'analisi cinematica delle seguenti strutture e, se sono isostatiche, tracciare il diagramma delle azioni interne.



3 Svolgimento degli esercizi del 25 maggio 2000

SVOLGIMENTO 1.

Per prima cosa è opportuno contare il numero di gradi di libertà ed il numero di gradi di vincolo, utilizzando la seguente tabella.

asta	3 GDL
incastro a terra	3 GDV
cerniera a terra	2 GDV
pattino a terra	2 GDV
carrello a terra	1 GDV
cerniera o pattino interni	2 GDV
carrello interno	1 GDV
cerniera interna, n aste concorrenti	$2(n - 1)$ GDV

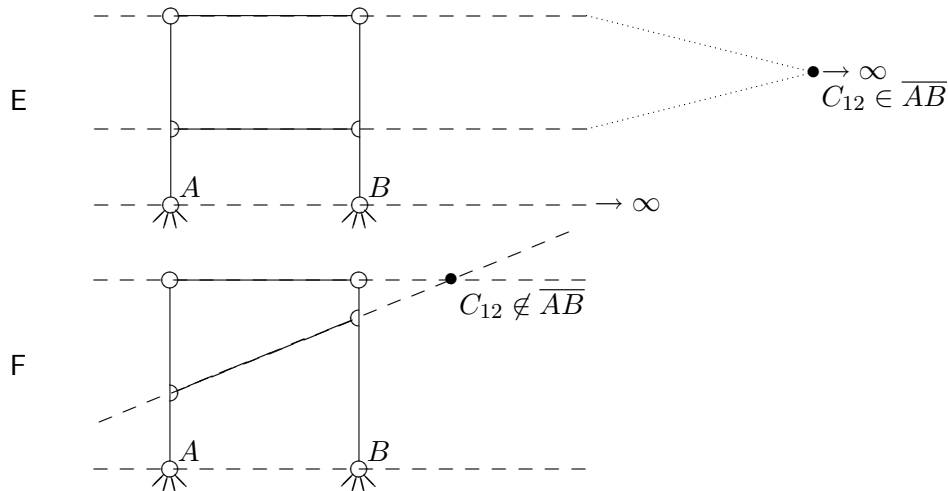
Il risultato è il seguente.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
GDL	3	6	6	3	12	12	6	3	6	39	36
GDV	3	6	6	3	12	12	6	4	5	39	35
GDL – GDV	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	1

Le strutture con $GDL > GDV$ sono sicuramente *ipostatiche*, quelle con $GDL < GDV$ sono *iperstatiche*, quelle con $GDL = GDV$ possono essere sia *isostatiche* che *labili*. Per discriminare tra il caso isostatico e quello labile occorre eseguire l'analisi cinematica della struttura, cfr. [2, capitolo 4.8]

- La struttura A è isostatica perché si tratta semplicemente di un corpo rigido incastrato a terra in un punto.
- Le strutture B, C, G sono isostatiche in quanto archi a tre cerniere con le cerniere non allineate.
- La struttura D è un corpo rigido vincolato a terra con cerniera e carrello; la retta perpendicolare al piano su cui scorre il carrello non passa per la cerniera.
- La struttura J si comporta come un corpo rigido perché è formata da anelli chiusi isostatici che hanno tutti almeno un lato in comune. Il vincolo a terra è isostatico (cerniera e carrello non labile.)
- I portali E ed F possono essere analizzati riducendoli ad archi a tre cerniere, dove la cerniera interna è rappresentata da C_{12} , centro di istantanea rotazione relativa tra i due piedritti. C_{12} è trovato come intersezione delle rette congiungenti le cerniere che collegano ciascuna traversa ai piedritti. Per il portale E le tre cerniere A, B, C_{12} sono

allineate, dunque la struttura è labile; per F invece le tre cerniere non sono allineate e dunque la struttura è isostatica.



I risultati ottenuti sono riassunti nella seguente tabella.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
isostatica	✓	✓	✓	✓		✓	✓			✓	
labile					✓						
ipostatica									✓		✓
iperstatica								✓			

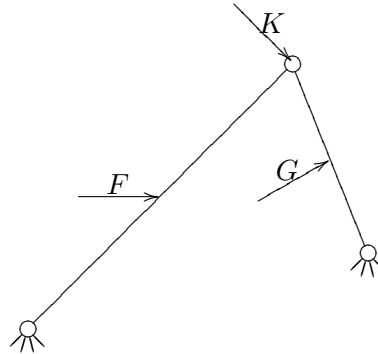
Per tracciare il diagramma delle azioni interne in ciascuna asta è necessario “smontare” le strutture, evidenziando le azioni che le singole aste si scambiano tra loro e le eventuali reazioni vincolari. Se la struttura è isostatica vi è la garanzia che queste azioni interne e le reazioni vincolari possono essere determinate scrivendo per ciascuna asta le tre equazioni cardinali della statica. Tuttavia procedere in questo modo, smontare completamente la struttura e scrivere tre equazioni di equilibrio per ogni asta, porterebbe alla scrittura di un sistema di n equazioni in n incognite di non facile soluzione per l'eccessiva grandezza di n .

È consigliabile invece procedere in modo più progressivo, mettendo in evidenza poche incognite alla volta, per non dover risolvere un sistema di equazioni simultanee troppo grosso. Non si vuole fornire qui una casistica esaustiva, ma si forniscono comunque alcuni consigli.

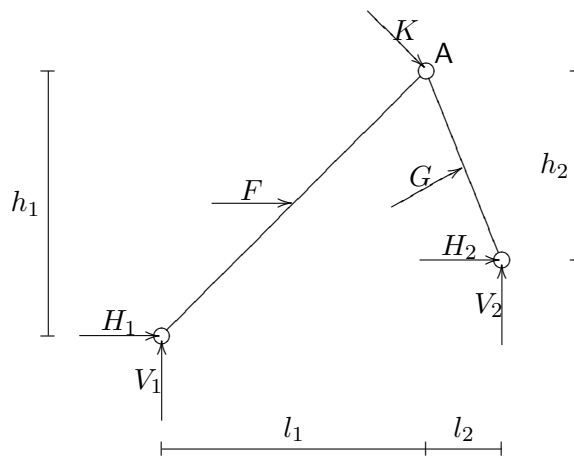
Biella All'interno di una struttura un'asta vincolata solo con due cerniere alle estremità e priva di carichi esterni è detta biella. È immediato verificare che una biella può avere solo un'azione interna normale, dovendo, per l'equilibrio alla rotazione, essere nulli sia il momento che il taglio.



Arco a tre cerniere. Per risolvere un arco a tre cerniere



conviene svincolarlo da terra, evidenziando così 4 reazioni incognite, H_1 , V_1 , H_2 , V_2 .



Le equazioni per risolvere questo problema sono

- le due equazioni globali di equilibrio alla traslazione,

$$H_1 + H_2 + R_H = 0,$$

$$V_1 + V_2 + R_V = 0,$$

dove R_H e R_V sono le risultanti di *tutte* le azioni esterne in direzione orizzontale e verticale, rispettivamente, (si intende cioè $R_H = F_H + K_H + G_H$ e $R_V = F_V + K_V + G_V$);

- le equazioni di equilibrio alla rotazione rispetto alla cerniera interna A della prima e della seconda asta rispettivamente (positivi i momenti anti-orari)

$$h_1 \cdot H_1 - l_1 \cdot V_1 + M_1 = 0,$$

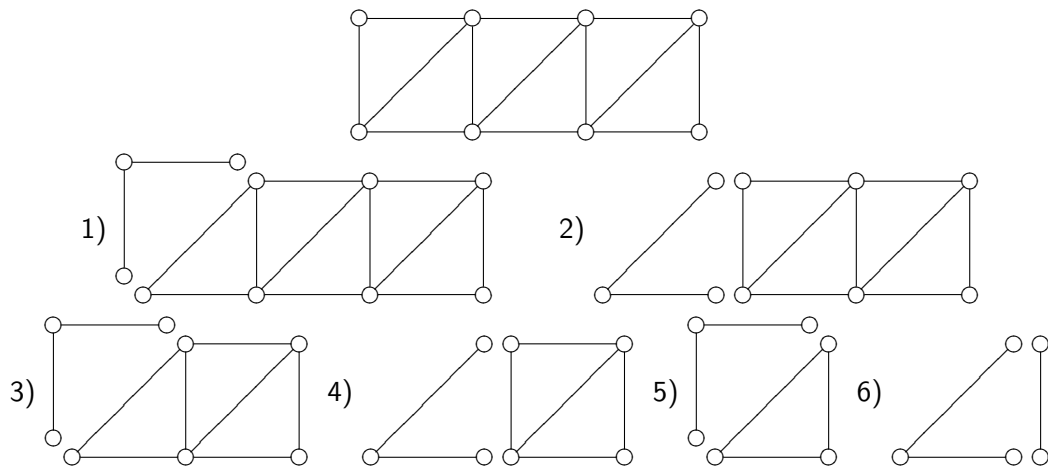
$$h_2 \cdot H_2 + l_2 \cdot V_2 + M_2 = 0,$$

dove M_1 e M_2 sono i momenti risultanti delle azioni esterne sulla prima e sulla seconda asta rispettivamente. Per il caso in figura M_1 è il momento di F rispetto

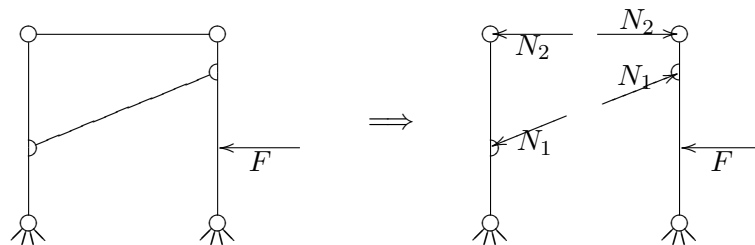
al polo A, M_2 è il momento di G rispetto ad A, mentre K non dà luogo a momenti. (Attenzione al segno dei momenti delle reazioni vincolari. Nel caso in figura H_1 , H_2 , V_2 danno luogo a momenti anti-orari, V_1 ad un momento orario: ovviamente per configurazioni diverse dell'arco a tre cerniere possono cambiare i segni dei momenti delle reazioni vincolari.)

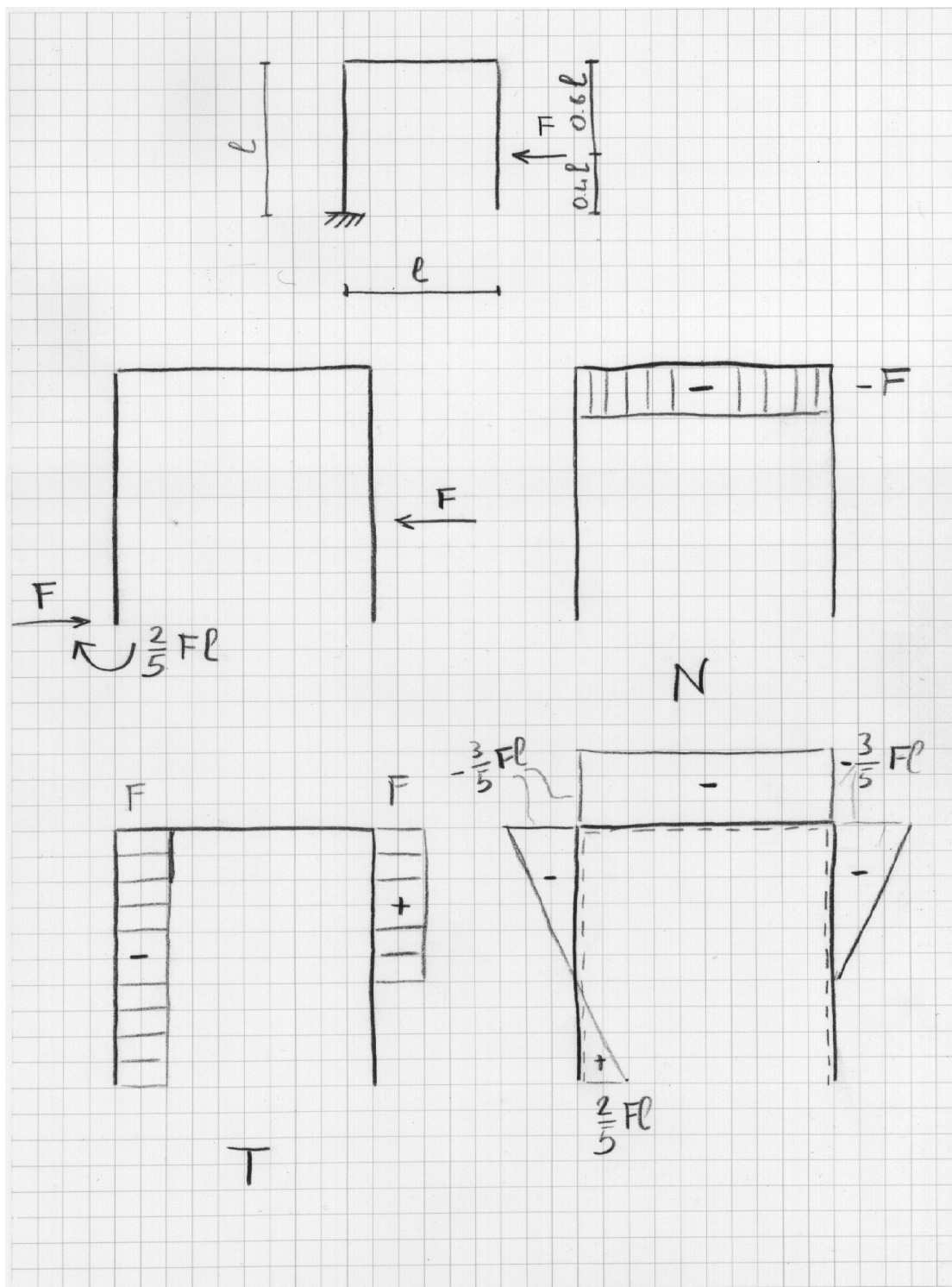
Strutture vincolate a terra in modo isostatico. Le strutture A, D, J sono vincolate a terra in modo isostatico: è possibile dunque trattare la struttura come un corpo rigido e calcolare immediatamente le reazioni vincolari. Ciò fatto si deve risolvere una struttura internamente isostatica libera di muoversi nello spazio ma caricata da azioni esterne equilibrate. Si procede dunque a smontare la struttura cercando di individuare una sequenza di strutture isostatiche. In pratica si deve immaginare che una parte della struttura sia "la terra" a cui sono vincolate sotto-strutture isostatiche, che vanno risolte una alla volta.

Per esempio la struttura J può essere risolta analizzando in sequenza gli archi a tre cerniere evidenziati qui sotto.



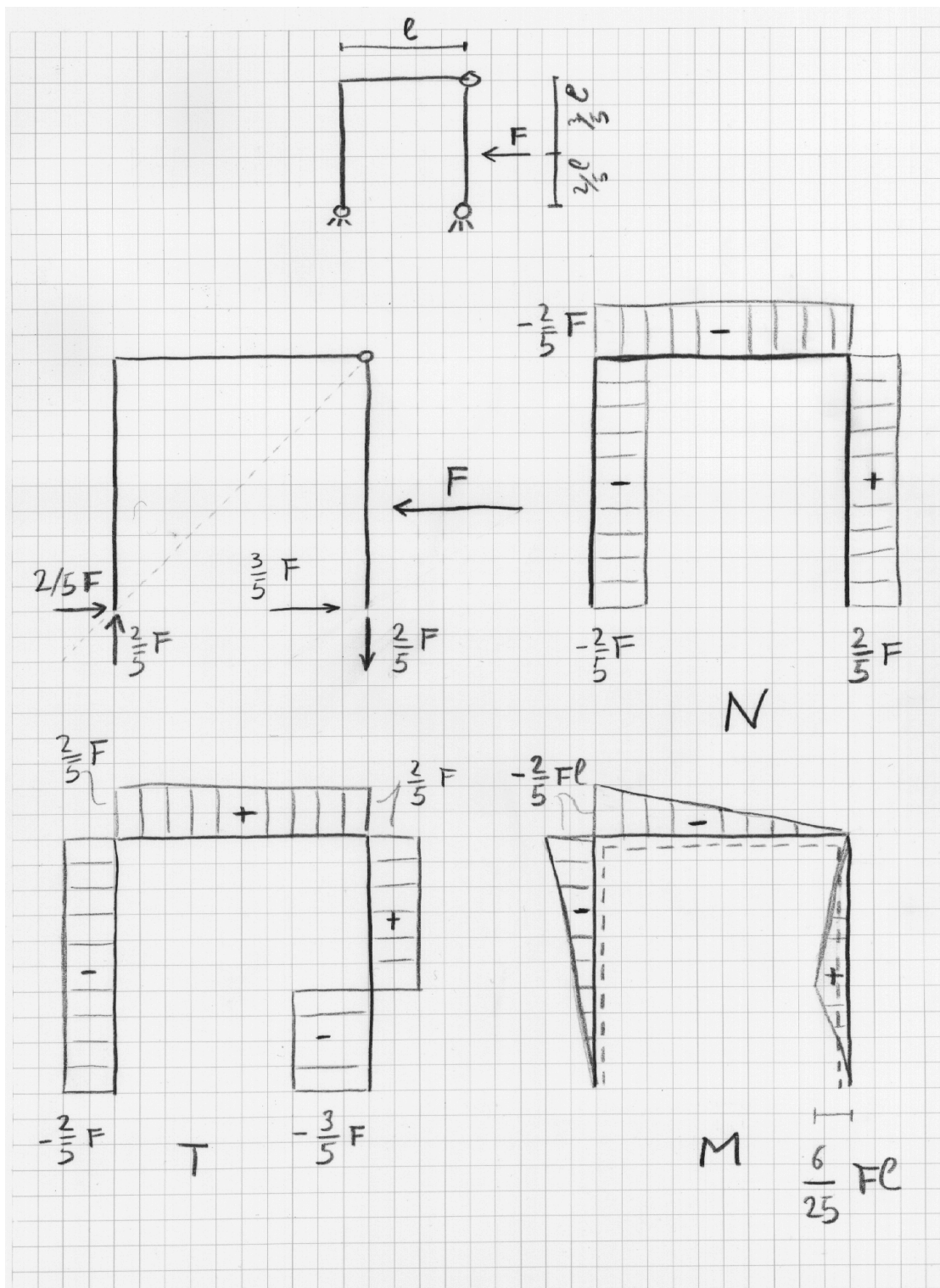
Portale Se, come nel caso F, le traverse sono scariche, queste si comportano come bielle. È possibile dunque smontare la struttura eliminando le bielle e mettendo in evidenza le azioni interne normali, che sono incognite. Così facendo i due piedritti risultano isolati e liberi di ruotare. Si possono dunque calcolare le azioni interne incognite N_1 e N_2 scrivendo le equazioni di equilibrio alla rotazione intorno alle cerniere a terra.





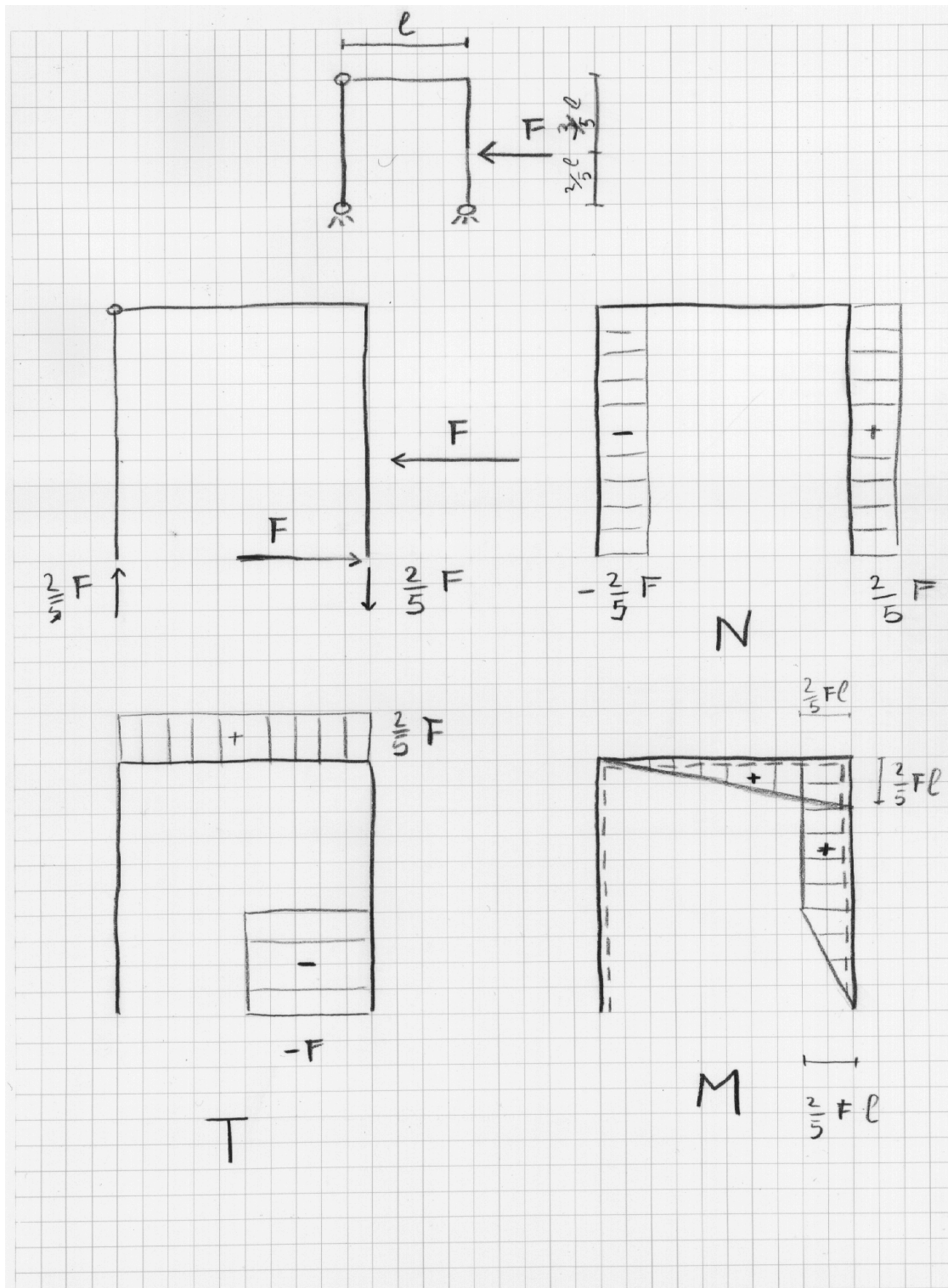
A

3 Svolgimento degli esercizi del 25 maggio 2000

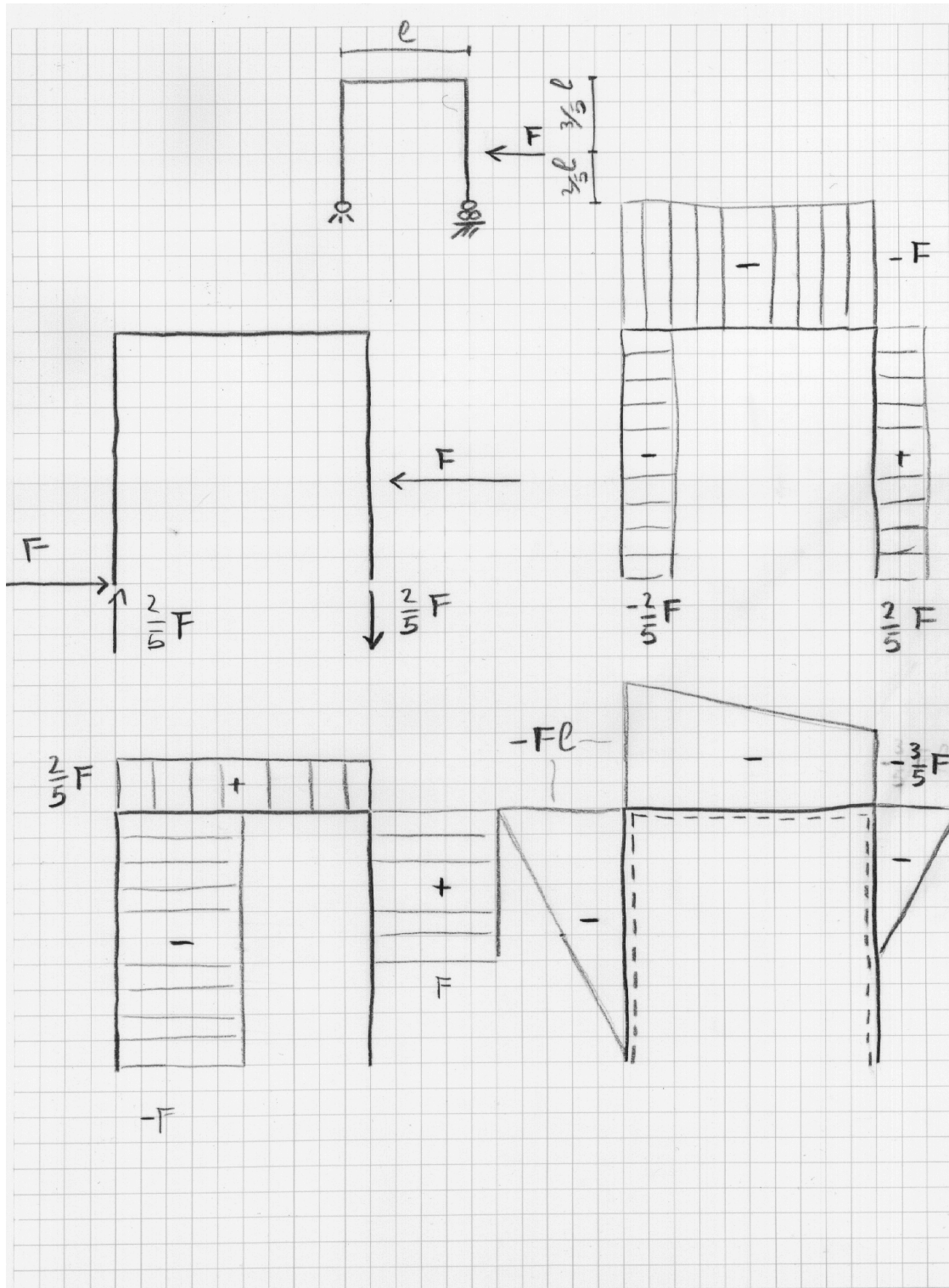


B

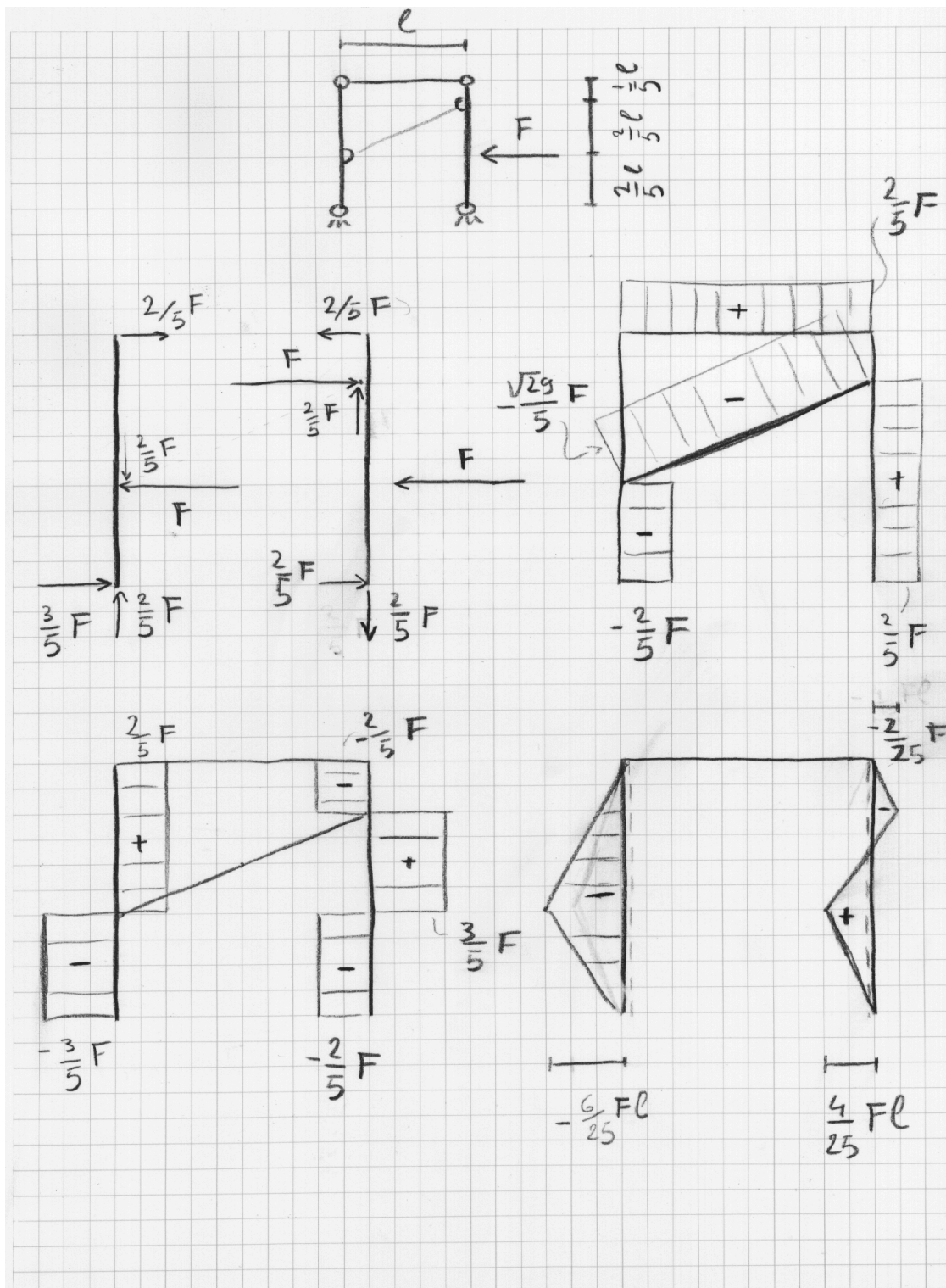
3 Svolgimento degli esercizi del 25 maggio 2000



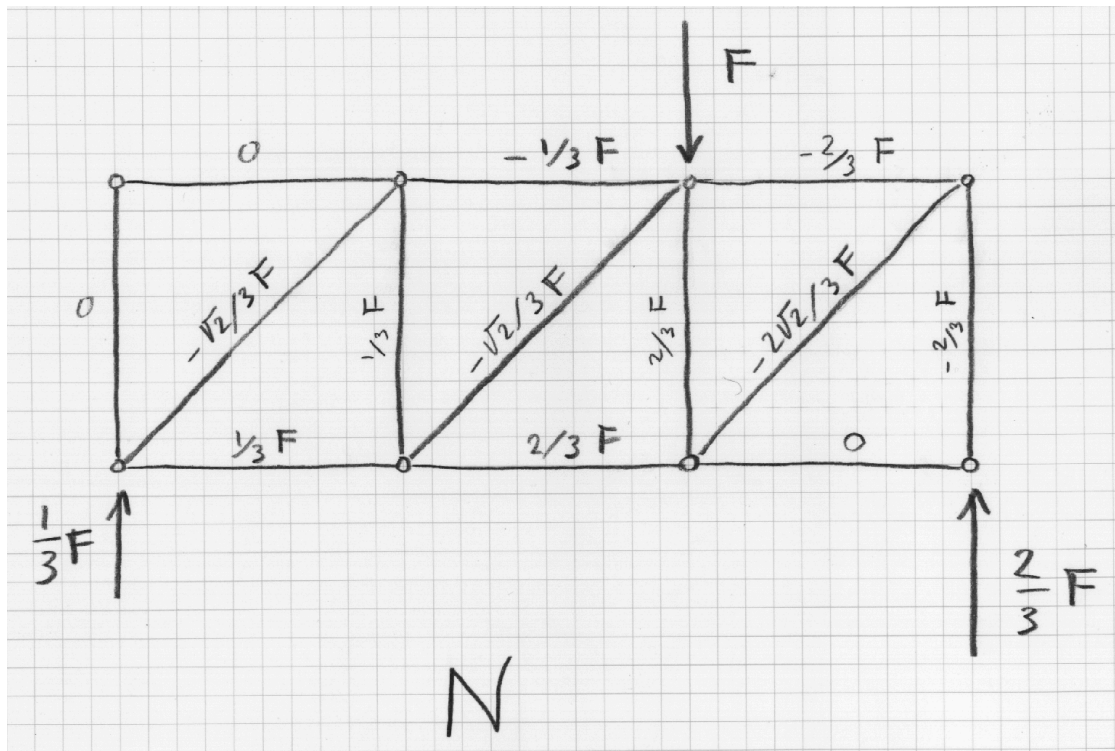
C



D



F



J

Bibliografia

- [1] Giulio Belloni e Giuseppe Bernasconi. *Sforzi Deformazioni e loro legami*. Edizioni Spiegel, Milano, 1984.
- [2] Elisa Guagenti Grandori, Fernanda Buccino, Elsa Garavaglia, e Giorgio Novati. *Statica, introduzione alla meccanica delle strutture*. McGraw-Hill Libri Italia srl, 1995. ISBN 88-386-0657-9.